doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2023.06.009

一种基于三维到达角的无偏伪线性卡尔曼滤波

林建军[1],王骧予涵[2],班晓军[1]

(1. 哈尔滨工业大学航天学院,哈尔滨 150000;
2. 哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院,哈尔滨 150001)

摘 要:为了解决大场景下基于三维到达角的目标跟踪问题,提出了一种具有无偏性的伪线性卡尔曼滤波。首先,基于三维到达角信息对目标运动模型与量测模型进行建模;之后,对量测模型进行了伪线性化处理,得到了线性形式的目标量测模型。为了解决伪线性卡尔曼滤波存在的有偏性问题,提出了一种结合 EKF(extend Kalman filter)的三维伪线性无偏卡尔曼滤波。仿真实验表明,该模型能够对非机动目标与机动目标有效跟踪,对于百公里级别的目标,当角测量误差从 0.1° 变化到 0.5°,算法在仿真时间结束时均能将绝对位置误差降低至 10 km 以内,且算法的运行速度与 EKF 为同一个量级,同时兼顾了抗干扰能力、定位跟踪精度、运行效率的要求,能够为大场景下的目标跟踪提供有效方法。

关键词:无源定位;三维到达角跟踪;无偏性;大场景;机动目标

中图分类号:TN953 **文献标志码**:A **文章编号**:2095-8110(2023)06-0077-09

An unbiased pseudo-linear Kalman filter based on three-dimensional angle of arrival

LIN Jianjun[1], WANG Xiangyuhan[2], BAN Xiaojun[1]

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150000, China;
2. College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering of University, Harbin 150001, China)

Abstract: In order to solve the problem of target tracking based on three-dimensional angle of arrival (AOA) in large scenes, a pseudo linear Kalman filter with unbiased properties is proposed. Firstly, the target motion and measurement are modeled based on three-dimensional angle of arrival. After that, the measurement model is pseudo-linearized to obtain a linear form of the target measurement model. In order to solve the bias problem of pseudo-linear Kalman filter, a 3D unbiased pseudo-linear Kalman filter combined with extended Kalman filter(EKF) is proposed. Simulation results show that the model can effectively track both non maneuvering and maneuvering targets. For targets at 100 km level, when the angle measurement error changes from 0.1° to 0.5°, the algorithm can reduce the absolute position error to less than 10 km at the end of the simulation time. The algorithm's operating speed is at the same order of magnitude as EKF. Meanwhile, to meet the requirements of anti-interference ability, positioning and tracking accuracy, and operating efficiency, and it can provide effective method for target tracking in large scenes.

Key words: Passive location; Three-dimensional angle of arrival tracking; Unbiased; Large scenes;

收稿日期:2023-06-13;**修订日期**:2023-09-19

基金项目:国家自然科学基金青年基金(62203461)

作者简介:林建军(1999-),男,硕士研究生,主要从事导航、无源定位方面的研究。

通信作者:班晓军(1978-),男,教授,博士生导师,主要从事系统辨识、自适应控制及模糊控制等方面的研究。

Maneuvering targets

0 引言

无源侦察定位技术具有作用距离远、机动性强的优点,在军事上存在着巨大的潜在价值。与有源定位不同,无源定位不需要向对方发射探测信号,具有隐蔽性良好、生存能力强的优点。因此,随着电子干扰技术、反侦察技术的发展,其在军事领域的研究价值日益凸显。无源定位的方法较多[1-2],根据定位原理的不同可分为测向定位法、信号强度定位法、到达时间定位法、到达时间差定位法、多普勒频率定位法等。机载快速定位技术是由搭载各式传感器的无人驾驶飞行器(unmanned aerial vehicle,UAV)取代传统的固定基站,对目标进行定位跟踪的一项技术。根据 UAV 的数量可以分为单站定位与多站定位。单站定位始终只有一架 UAV 工作不需要受到其他限制,具有机动性强、灵活性高的优点,但单次测量时存在信息量不足,无法对目标运动状态完全估计;而多站定位观测信息虽然较丰富,对运动形式要求较少,但不同平台之间的数据同步与数据融合都有着严格的限制,使得观测系统的机动性和独立性有所降低[3]。因此,单站定位技术具有更为巨大的研究潜力。

基于三维到达角对目标运动状态进行估计的技术称为 3D-AOA(three-dimensional angle of arrival)目标跟踪,诸多学者对该技术进行了研究,按照状态估计方法大致可以分为非线性滤波法与伪线性滤波法。伪线性滤波方法是通过对具有非线性性质的角度量测方程进行伪线性化得到[4],具有计算复杂度低、初值不敏感的优点,文献[5]曾对EKF、伪线性滤波以及粒子滤波在二维条件下的性能进行了比较,结果表明伪线性滤波方法与粒子滤波的性能接近,但其算法复杂度远低于粒子滤波。但伪线性滤波在噪声较大时,存在严重的有偏性问题[6],为此,Dogancay 等[7-8]对偏差进行了分析并设计了误差补偿方法,并将辅助变量法也应用到伪线性滤波上。偏差补偿伪线性卡尔曼滤波(bias-compensated pseudo-linear Kalman filter, BC-PLKF)与辅助变量伪线性卡尔曼滤波(instrumental variable pseudo-linear Kalman filter, IV-PLKF)是其中比较有代表性的方法,但 IV-PLKF 受限于 BC-PLKF,当目标出现机动时很可能在 BC-PLKF 时就出现发散现象,严重影响 IV-PLKF 性能;郭戈等[9]则对传感器不确定性进行了考虑,对过程噪声的不确定性进行了建模,提出了递推辅助变量伪线性卡尔曼滤波(recursive instrumental variable Kalman filter, RIVKF);而 Pang 等[10]则考虑了观测平台自身位置估计误差造成的影响,对该部分误差进行了补偿,文献[11-12]则是采用了一种添加约束条件的方法来达到渐进无偏的效果。Huang 等[13]将噪声项与真值分离的方法适用于二维条件的具有无偏性的 UB-PLKF(unbiased pseudo-linear Kalman filter),从原理上实现了算法的无偏性,并通过仿真实验表明该方法能够较好地解决机动目标的跟踪问题。

然而,在基于角度信息的目标跟踪中,大多数方法适用于二维条件下的近距离目标,且研究对象主要为匀速运动目标,而对于大场景下的远距离机动目标研究较少。本文将在此基础上,将适用于二维场景下的 UB-PLKF 方法推广到三维条件下,并设计 EKF 作为角度滤波器对其进行辅助得到 3D-UBKF(three dimensional unbiased Kalman filter),使其适用于远距离场景下机动目标跟踪,并保持较高的定位精度。

1 基于 3D-AOA 的目标定位模型

1.1 基于 3D-AOA 的运动模型

对于机动目标,其运动轨迹呈现为曲线形式,在文献[14]就将目标轨迹假设为服从关于时间 t 的 N 次多项式,而根据样条插值理论,可以选择一次函数作为样条插值的基函数,该情况正对应了目标匀速运动。因此,将匀速运动模型作为机动目标的运动模型具有一定的合理性。

定义目标在 k 时刻的位置用 $\boldsymbol{p}_k=[x_{\mathrm{T},k},y_{\mathrm{T},k},z_{\mathrm{T},k}]^{\mathrm{T}}$ 表示,速度 $\boldsymbol{v}_k=[v_{x,k},v_{y,k},v_{z,k}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}_k$ 为目标在 k 时刻的状态变量,其状态空间模型可由如下形式表示

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{w}_{k-1} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}_k=[\boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{F}_k$ 为 k 时刻的目标状态转移矩阵;$\boldsymbol{w}_k$ 表示 k 时刻的过程噪声,其自相关矩阵 $\boldsymbol{Q}_k=\mathrm{E}\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\}$,

$$\boldsymbol{F}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3\times3} & T\boldsymbol{I}_{3\times3}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_{3\times3}\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{Q}_k=\mathrm{E}\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}\}=\begin{bmatrix}\dfrac{T^3}{3}\boldsymbol{qI}_{3\times3} & \dfrac{T^2}{2}\boldsymbol{qI}_{3\times3}\\ \dfrac{T^2}{2}\boldsymbol{qI}_{3\times3} & T\boldsymbol{qI}_{3\times3}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}=\mathrm{diag}([qx,qy,qz]) \tag{3}$$

其中，T 表示采样时间间隔；$\boldsymbol{q}$ 表示噪声的功率谱密度($\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3$)；$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵。

1.2　基于 3D-AOA 的量测模型

基于 3D-AOA 的目标跟踪，其量测模型具有非线性。定义观测平台的位置 $\boldsymbol{u}_k=[x_{\mathrm{o},k},y_{\mathrm{o},k},z_{\mathrm{o},k}]^{\mathrm{T}}$，观测平台对目标的方位角与俯仰角的观测方程可表示为

$$\boldsymbol{Z}_k=h(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)+\boldsymbol{\delta}_k \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\delta}_k=[n_k,m_k]^{\mathrm{T}}$；$n_k,m_k$ 为相互独立的高斯白噪声，标准差分别为 $\sigma_{\theta,k},\sigma_{\varphi,k}$；$\mathrm{E}\{\boldsymbol{\delta}_k\boldsymbol{\delta}_k^{\mathrm{T}}\}=\boldsymbol{R}_k=\mathrm{diag}([\sigma_{\theta,k}^2,\sigma_{\varphi,k}^2])$。

$$h(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)=\begin{bmatrix}\theta_k\\ \varphi_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tan^{-1}\dfrac{x_{\mathrm{T},k}-x_{\mathrm{o},k}}{y_{\mathrm{T},k}-y_{\mathrm{o},k}}\\ \sin^{-1}\dfrac{z_{\mathrm{T},k}-z_{\mathrm{o},k}}{\|\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{u}_k\|}\end{bmatrix} \tag{5}$$

该模型进行伪线性化可以得到新的系统状态方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{x}_{k-1}+\boldsymbol{w}_{k-1}\\ \tilde{\boldsymbol{z}}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\eta}_k\end{cases} \tag{6}$$

式中

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{z}}_k&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_{\tilde{\theta},k}\\ \boldsymbol{h}_{\tilde{\varphi},k}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{\eta}_k\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_{\tilde{\theta},k}\\ \boldsymbol{h}_{\tilde{\varphi},k}\end{bmatrix}\boldsymbol{Mx}_k+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_{\theta,k}\\ \boldsymbol{\eta}_{\varphi,k}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{I}_{3\times3},\boldsymbol{0}_{3\times3}]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\eta,k}&=\mathrm{E}\{\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_k^{\mathrm{T}}\}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{R}_{\eta\theta,k},\boldsymbol{R}_{\eta\varphi,k})\\ &\approx\mathrm{diag}(d_k^2\cos^2(\varphi_k)\sigma_{\theta,k}^2,d_k^2\sigma_{\varphi,k}^2)\end{aligned} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{h}_{\tilde{\theta},k}=[\cos\tilde{\theta}_k,-\sin\tilde{\theta}_k,0] \tag{10}$$

$$\boldsymbol{h}_{\tilde{\varphi},k}=[\sin\tilde{\theta}_k\sin\tilde{\varphi}_k,\cos\tilde{\theta}_k\sin\tilde{\varphi}_k,-\cos\tilde{\varphi}_k] \tag{11}$$

1.3　伪线性卡尔曼滤波

根据 1.2 节的结果，将卡尔曼滤波算法应用到该伪线性系统中，得到如下的伪线性卡尔曼滤波算法

(1)状态预测阶段

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\boldsymbol{F}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_k \tag{13}$$

(2)更新阶段

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_{\eta,k}+\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{14}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}+\boldsymbol{K}_k(\tilde{\boldsymbol{z}}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k}=(\boldsymbol{I}_{6\times6}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k|k-1} \tag{16}$$

对卡尔曼滤波进行偏差分析，将式(12)，(13)，(14)代入到式(15)中，并利用矩阵求逆引理可以得到

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}-\boldsymbol{x}_k=&(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\eta,k}^{-1}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}\times\\ &(\boldsymbol{F}_k(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}-\boldsymbol{x}_{k-1})-\boldsymbol{w}_{k-1})+\\ &(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\eta,k}^{-1}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\eta,k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k\end{aligned} \tag{17}$$

令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_k=&(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\eta,k}^{-1}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}\cdot\\ &\boldsymbol{F}_k(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}-\boldsymbol{x}_{k-1})\end{aligned} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{B}_k=(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\eta,k}^{-1}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}\boldsymbol{w}_{k-1} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{C}_k=(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\eta,k}^{-1}\boldsymbol{H}_k)^{-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\eta,k}^{-1}\boldsymbol{\eta}_k \tag{20}$$

于是，对式(17)求取期望可以得到伪线性卡尔曼滤波估计的偏差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_k&=\mathrm{E}\{\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}-\boldsymbol{x}_k\}\\ &=\mathrm{E}\{\boldsymbol{A}_k\}+\mathrm{E}\{\boldsymbol{B}_k\}+\mathrm{E}\{\boldsymbol{C}_k\}\end{aligned} \tag{21}$$

也就是说，对于伪线性卡尔曼滤波而言，其原理性偏差由 $\boldsymbol{B}_k$ 与 $\boldsymbol{C}_k$ 两部分组成。$\boldsymbol{B}_k$ 是由目标的过程噪声引起，当过程噪声较小时，该部分可近似为 0，即 $\mathrm{E}\{\boldsymbol{B}_k\}\approx0$；而 $\boldsymbol{C}_k$ 是由于系统伪线性化使得量测矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 与 $\boldsymbol{\eta}_k$ 存在相关性引起的，二者之间的相关性不可忽略，是伪线性卡尔曼滤波存在有偏性的根本原因。$\boldsymbol{C}_k$ 的大小与角测量噪声大小有关，当噪声较小时并不明显，而当角测量噪声增大时，将会快速增大使得状态估计结果迅速发散。因此为了保证目标跟踪的精度，必须对偏差进行处理。

2　3D-UBKF

2.1　3D-UBKF 算法原理

为了消除伪线性卡尔曼滤波的偏差，目前的解决思路主要分为对偏差进行估计再补偿以及消除量测矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 与 $\boldsymbol{\eta}_k$ 之间相关性两种[7]。而根据偏差补偿的解决思路，只适用于角测量为小噪声的情况，当噪声较大时去偏效果严重下降，如 BC-PLKF；消除量测矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 与 $\boldsymbol{\eta}_k$ 之间相关性却能从原理上解决算法的有偏性问题，如 IV-PLKF。但是，该方法的辅助变量却是通过 BC-PLKF 进行构造，受限于 BC-PLKF 的性能。为了消除 $\boldsymbol{H}_k$ 与 $\boldsymbol{\eta}_k$ 之间相关性，

本文通过将噪声项从量测矩阵中分离出来，提出了一种适用于三维场景且具有无偏性能的 3D-UBKF 算法。然而，将该方法应用到远距离场景下时，发现该方法易出现估计发散的情况，为此，本文还设计了 EKF 作为角度滤波器帮助 3D-UBKF 来改善该问题。

在小噪声条件下，假设 $\cos n_k \approx \cos m_k \approx 1, \sin n_k \approx n_k, \sin m_k \approx m_k$，将其代入伪线性量测矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{\tilde{\theta},k} &= [\cos\tilde{\theta}_k, -\sin\tilde{\theta}_k, 0] \\ &= \cos n_k[\cos\theta_k, -\sin\theta_k, 0] + \\ &\quad \sin n_k[-\sin\theta_k, -\cos\theta_k, 0] \\ &\approx [\cos\theta_k, -\sin\theta_k, 0] - n_k[\sin\theta_k, \cos\theta_k, 0]\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{\tilde{\varphi},k} &= [\sin\tilde{\theta}_k\sin\tilde{\varphi}, \cos\tilde{\theta}_k\sin\tilde{\varphi}_k, -\cos\tilde{\varphi}_k] \\ &= \cos m_k[\sin\tilde{\theta}_k\sin\varphi_k, \cos\tilde{\theta}_k\sin\varphi_k, -\cos\varphi_k] + \\ &\quad \sin m_k[\sin\tilde{\theta}_k\cos\varphi_k, \cos\tilde{\theta}_k\cos\varphi_k, \sin\varphi_k] \\ &\approx [\sin\tilde{\theta}_k\sin\varphi_k, \cos\tilde{\theta}_k\sin\varphi_k, -\cos\varphi_k] + \\ &\quad m_k[\sin\tilde{\theta}_k\cos\varphi_k, \cos\tilde{\theta}_k\cos\varphi_k, \sin\varphi_k]\end{aligned} \tag{23}$$

将式(22)与式(23)代入式(6)得到

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_k = \boldsymbol{G}_k\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_k + \mathrm{diag}([m_{k1}, m_{k2}])\boldsymbol{\delta}_k \tag{24}$$

式中

$$\boldsymbol{G}_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k, -\sin\theta_k, 0 \\ \sin\tilde{\theta}_k\sin\varphi_k, \cos\tilde{\theta}_k\sin\varphi_k, -\cos\varphi_k \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$m_{k1} = [-\sin\theta_k, -\cos\theta_k, 0]\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_k + d_k\cos\varphi_k \tag{26}$$

$$m_{k2} = [\sin\tilde{\theta}_k\cos\varphi_k, \cos\tilde{\theta}_k\cos\varphi_k, \sin\varphi_k]\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_k - d_k \tag{27}$$

将式(24)两边同乘对角阵 $\mathrm{diag}([1/m_{k1}, 1/m_{k2}])$，于是得到

$$\bar{\boldsymbol{z}}_k = \bar{\boldsymbol{H}}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\delta}_k \tag{28}$$

据式(21)的结果可知，此时原理性偏差

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{\boldsymbol{C}_k\} = \boldsymbol{P}_{k|k}(&\boldsymbol{R}_{\eta\theta,k}^{-1}\mathrm{E}\{\bar{\boldsymbol{H}}_{\theta,k}^{\mathrm{T}}n_k \mid \boldsymbol{x}_k\} + \\ &\boldsymbol{R}_{\eta\varphi,k}^{-1}\mathrm{E}\{\bar{\boldsymbol{H}}_{\varphi,k}^{\mathrm{T}}m_k \mid \boldsymbol{x}_k\})\end{aligned} \tag{29}$$

由于 $\bar{\boldsymbol{H}}_{\theta,k}$ 与 $\bar{\boldsymbol{H}}_{\varphi,k}$ 分别与角测量噪声 n_k、m_k 无关，因此 $\mathrm{E}\{\boldsymbol{C}_k\} = 0$，即该算法具有无偏性。整理 3D-UBKF 算法如表 1 所示。

在实际应用过程中，由于 d_k 以及观测真值 θ_k，φ_k 未知，无法直接得到 $\boldsymbol{G}_k$ 以及参数 m_{k1}, m_{k2}，可以采用估计值代替，这个思想与辅助变量法具有一定的相似之处。而根据辅助变量法的收敛条件，需要保证估计矩阵 $\hat{\boldsymbol{G}}_k$ 与真值 $\boldsymbol{G}_k$ 具有较强的相关性，若直接采用该方法的角度估计值作为真值输入，那么

表 1 基于 3D-UBKF 的目标跟踪步骤

Tab. 1 Target tracking steps based on 3D-UBKF

基于 3D-UBKF 的目标跟踪步骤
输入：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1\mid k-1}^{\mathrm{UB}}, \boldsymbol{P}_{k-1\mid k-1}^{\mathrm{UB}}, \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{R}_k$
输出：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k}^{\mathrm{UB}}, \boldsymbol{P}_{k\mid k}^{\mathrm{UB}}$
For $k=1,2,\cdots,N$
预测阶段：计算状态量先验估计，误差协方差先验估计
Step1：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k-1}^{\mathrm{UB}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1\mid k-1}^{\mathrm{UB}}$
Step2：$\boldsymbol{P}_{k\mid k-1}^{\mathrm{UB}} = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k-1\mid k-1}^{\mathrm{UB}}\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_k$
更新阶段：计算卡尔曼增益，状态后验估计，误差协方差后验估计
Step1：$\bar{\boldsymbol{z}}_k = \mathrm{diag}([1/m_{k1}, 1/m_{k2}])\tilde{\boldsymbol{z}}_k$
$\bar{\boldsymbol{H}}_k = \mathrm{diag}([1/m_{k1}, 1/m_{k2}])\boldsymbol{G}_k$
Step2：$\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{UB}} = \boldsymbol{P}_{k\mid k-1}^{\mathrm{UB}}\bar{\boldsymbol{H}}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_k + \bar{\boldsymbol{H}}_k\boldsymbol{P}_{k\mid k-1}^{\mathrm{UB}}\bar{\boldsymbol{H}}_k^{\mathrm{T}})^{-1}$
Step3：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k}^{\mathrm{UB}} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k-1}^{\mathrm{UB}} + \boldsymbol{K}_k^{\mathrm{UB}}(\bar{\boldsymbol{z}}_k - \bar{\boldsymbol{H}}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k-1}^{\mathrm{UB}})$
Step4：$\boldsymbol{P}_{k\mid k}^{\mathrm{UB}} = (\boldsymbol{I}_{6\times 6} - \boldsymbol{K}_k^{\mathrm{UB}}\bar{\boldsymbol{H}}_k)\boldsymbol{P}_{k\mid k-1}^{\mathrm{UB}}$
End

很容易在前期由于估计不够准确而使得 $\hat{\boldsymbol{G}}_k$ 与真值 $\boldsymbol{G}_k$ 不相关，使得目标运动状态估计发散。EKF 是一种不具有原理性偏差的非线性滤波算法，且计算量小，对角度的估计较稳定，因此，采用 EKF 方法后验估计的方位角与俯仰角作为该算法的角度真值输入，从而得到

$$\hat{\boldsymbol{G}}_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, -\sin\theta_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, 0 \\ \sin\tilde{\theta}_k\sin\varphi_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, \cos\tilde{\theta}_k\sin\varphi_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, -\cos\varphi_{k|k}^{\mathrm{EKF}} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\hat{d}_k = \|\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{UB}} - \boldsymbol{u}_k\| \tag{31}$$

$$\hat{d}_{xy,k} = \|\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{UB}}(1:2) - \boldsymbol{u}_k(1:2)\| \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\hat{m}_{k1} = [-\sin\theta_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, -\cos\theta_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, 0]\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{UB}} + \\ \hat{d}_{xy,k}\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\hat{m}_{k2} = [\sin\tilde{\theta}_k\cos\varphi_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, \cos\tilde{\theta}\cos\varphi_{k|k}^{\mathrm{EKF}}, \sin\varphi_{k|k}^{\mathrm{EKF}}] \cdot \\ \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}^{\mathrm{UB}} - \hat{d}_k\end{aligned} \tag{34}$$

于是，总结 3D-UBKF 算法的工作流程如图 1 所示。

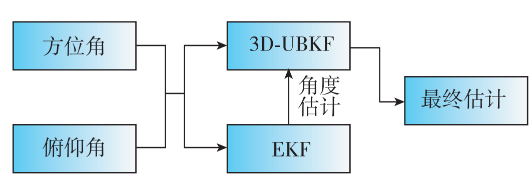


图 1 3D-UBKF 工作流程

Fig. 1 3D-UBKF workflow

2.2 基于 EKF 的角度估计

EKF 适用于非线性高斯模型，应用十分广泛。

根据第一章的模型，可以得到该系统模型为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1} \\ \boldsymbol{Z}_k = h(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \boldsymbol{\delta}_k \end{cases} \tag{35}$$

EKF 采用泰勒公式展开将非线性模型近似为线性模型，将其应用到系统(35)中，对于表 2 中 $\boldsymbol{J}_k$ 可由式(36)得到

$$\boldsymbol{J}_k = \begin{bmatrix} \dfrac{\sin\hat{\theta}_{k|k-1}}{\hat{d}_{k|k-1}\cos\hat{\varphi}_{k|k-1}} & -\dfrac{\cos\hat{\theta}_{k|k-1}}{\hat{d}_{k|k-1}\cos\hat{\varphi}_{k}} & 0 \\ -\dfrac{\sin\hat{\theta}_{k|k-1}\sin\hat{\varphi}_{k}}{\hat{d}_{k|k-1}} & -\dfrac{\cos\hat{\theta}_{k|k-1}\sin\hat{\varphi}_{k|k-1}}{\hat{d}_{k|k-1}} & \dfrac{\cos\hat{\varphi}_{k|k-1}}{\hat{d}_{k|k-1}} \end{bmatrix} \boldsymbol{M} \tag{36}$$

表 2　基于 EKF 的角度估计步骤

Tab. 2　AOA estimation steps based on EKF

基于 EKF 的角度估计步骤
输入：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1\mid k-1}, \boldsymbol{P}_{k-1\mid k-1}, \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{R}_k$
输出：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k}, \boldsymbol{P}_{k\mid k}, \hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k}$
For $k=1,2,\cdots,N$
预测阶段：计算状态量先验估计，误差协方差先验估计
Step1：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k-1} = \boldsymbol{F}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1\mid k-1}$
Step2：$\boldsymbol{P}_{k\mid k} = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{P}_{k\mid k-1} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_k$
更新阶段：计算卡尔曼增益，状态后验估计，误差协方差后验估计
Step1：$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k\mid k-1}\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{J}_k \boldsymbol{P}_{k\mid k-1}\boldsymbol{J}_k^{\mathrm{T}})^{-1}$
Step2：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{J}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k-1})$
Step3：$\boldsymbol{P}_{k\mid k} = (\boldsymbol{I}_{6\times 6} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{J}_k)\boldsymbol{P}_{k\mid k-1}$
Step4：$\hat{\boldsymbol{Z}}_{k\mid k} = [\hat{\theta}_{k\mid k}, \hat{\varphi}_{k\mid k}]^{\mathrm{T}} = h(\hat{\boldsymbol{x}}_{k\mid k}, \boldsymbol{u}_k)$
End

式中

$$\begin{cases}\hat{d}_{k|k-1} = \sqrt{(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}(1) - \boldsymbol{u}_{x,k})^2 + (\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}(2) - \boldsymbol{u}_{y,k})^2 + (\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}(3) - \boldsymbol{u}_{z,k})^2} \\ \hat{\boldsymbol{Z}}_{k|k-1} = [\hat{\theta}_{k|k-1}, \hat{\varphi}_{k|k-1}]^{\mathrm{T}} = h(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}, \boldsymbol{u}_k) \end{cases} \tag{37}$$

3　仿真分析

本章通过仿真实验对算法的性能进行测试，选择 EKF，CKF (cubature Kalman filter)[15]，3D-IVKF(3D-instrumental variable based Kalman filter)[8]作为对比对象，分别对具有单一运动模型的目标以及组合运动模型的目标(匀速运动模型＋协同转弯模型)进行了比较。

3.1　单一运动模型目标仿真分析

仿真场景一：仿真时间长 720 s，采样时间间隔 0.2 s，蒙特卡罗仿真 200 次。观测平台的出发点为坐标原点，起始速度为$(0\ \mathrm{m/s},\ 250\ \mathrm{m/s}, 0\ \mathrm{m/s})^{\mathrm{T}}$。为了保证观测平台对目标具有较高的可观性，过程中采用协同转弯与匀速直线运动的组合形式，无天向运动，最终设计观测平台的第一阶段的机动策略如表 3 所示，重复该过程 9 次。

水平面上的机动轨迹如图 2 所示，起始点为坐标原点。

表 3　航行轨迹参数

Tab. 3　Navigation trajectory parameters

阶段	航行动作	持续时间/s	速度 v/(m/s)	角速度 ω/[(°)/s]
1	北向飞行	40	250	0
2	右转弯	18	250	5
3	东向飞行	22	250	0

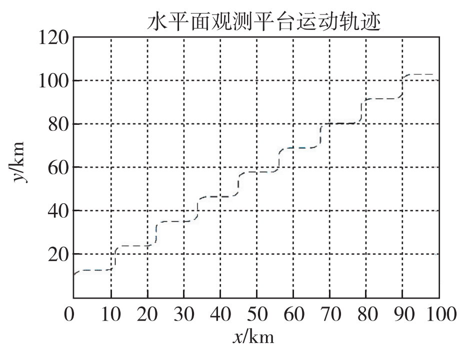
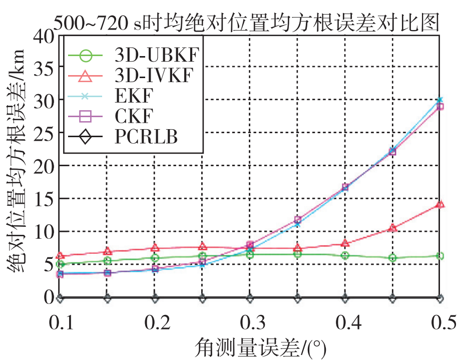


图 2　观测平台 X-Y 平面运动轨迹

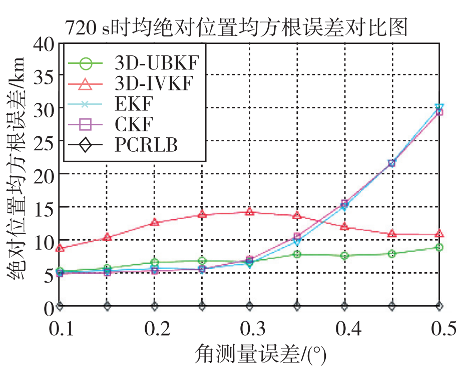
Fig. 2　Observation platform X-Y plane motion trajectory

目标的起始点位置为$(60\ \mathrm{km},\ 80\ \mathrm{km},\ 10\ \mathrm{km})^{\mathrm{T}}$，速度为$(-330\ \mathrm{m/s},\ -170\ \mathrm{m/s}, 1.21\ \mathrm{m/s})^{\mathrm{T}}$，将过程噪声 $\boldsymbol{Q}$ 中的过程谱密度噪声设置为 $q_x = 2\ \mathrm{m^2/s^3}$，$q_y = 2\ \mathrm{m^2/s^3}$，$q_z = 0.2\ \mathrm{m^2/s^3}$。另外，设置滤波器初始值。由于估计过程中假设无先验信息，只能通过传感器探测范围来确定，将滤波器初值设为 1.5 倍真值，初始协方差设置为 $\boldsymbol{P}_{0|-1} = \mathrm{diag}([625, 625, 625, 6.25, 6.25, 6.25])$，观测噪声协方差矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与过程噪声矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 此处均设置为真值，3D-IVKF 中的阈值设置为 3σ。

图 3 比较了目标在做匀速直线运动条件下，在不同角测量误差条件下的算法，其中，图 3(a)对比了不同算法在 500～720 s 时间内的绝对位置误差(absolute position error，APE），该指标可一定程度反映算法的收敛速度，图 3(b)对比了采样结束时不同算法的 APE，此时目标与观测平台距离为342 km。通过图 3(a)与图 3(b)可以看出当角测量误差从 0.1°变化到 0.5°时，各算法误差逐渐增大，而 3D-UBKF 与 3D-IVKF 方法的误差变化较小，但角测量误差从 0.1°到 0.25°的变化过程中，CKF 与 EKF 方法的误差均显著低于其他两种基于伪线性量测方程的方法；当角测量误差达到 0.3°时，由于 3D-UBKF 以及 3D-IVKF 对角测量误差相对不敏感，此时 3D-UBKF 在 500～720 s 时间内的时均 APE 达到最小，而 3D-IVKF 的误差则与 EKF，CKF 十分接近，这说明此时 3D-UBKF 的收敛速度较快；而当角测量误差达到 0.5°时，3D-UBKF 的算法优势进一步扩大，此时从精度与收敛速度上均为最优。图 4 展示了算法在 0.5°角测量噪声时的跟踪效果。



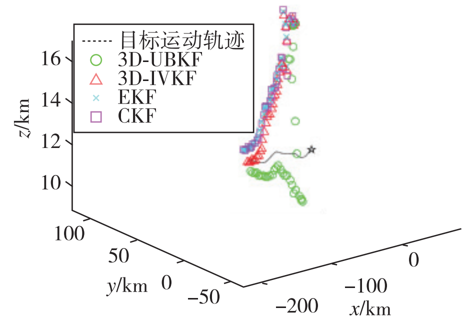
(a) time-ave APE 对比图



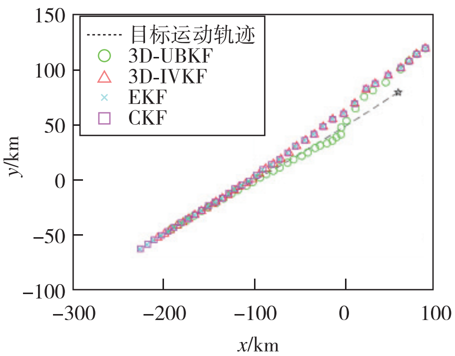
(b) 720 s 时 APE 对比图

图 3 目标匀速时算法在不同角测量误差条件下的误差对比图

Fig. 3 Error comparison of algorithm under different angular measurement error conditions when the target speed is constant



(a) 匀速目标跟踪



(b) 匀速目标跟踪水平投影

图 4 匀速目标跟踪态势图

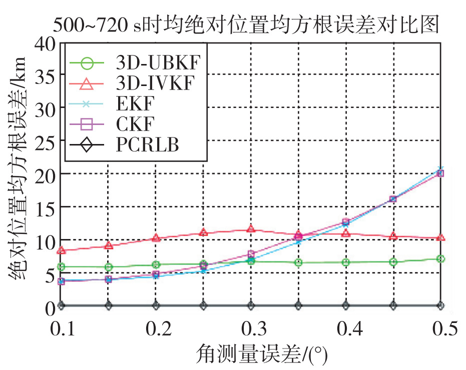
Fig. 4 Situation map of uniform motion target tracking

因此，根据上述仿真结果可以看出，在匀速条件下，EKF，CKF 的误差指标接近，在角测量误差小于 0.3°时均表现出优异的定位跟踪性能，但当角测量误差大于 0.3°时，对算法的收敛速度影响较大；基于伪线性量测方程推导的 3D-IVKF 与 3D-UBKF 在小噪声条件下定位跟踪性能上则稍微差一些，但收敛速度与跟踪精度对角测量误差相对不敏感，当角测量误差达到 0.5°时，3D-UBKF 能达到同时兼顾精度与收敛速度的目的。

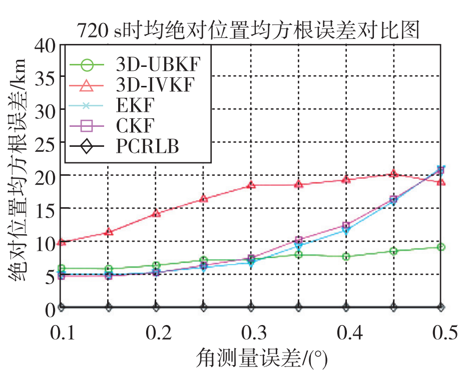
3.2 组合运动模型目标仿真分析

仿真场景二：观测平台的运动轨迹与仿真场景一保持一致，目标的起始点位置为(60 km，80 km，10 km)$^{\mathrm{T}}$，初始速度为(−330 m/s，−170 m/s，1.21 m/s)$^{\mathrm{T}}$，过程噪声 $\boldsymbol{Q}$ 中的过程谱密度噪声设置为 $q_x=2\ \mathrm{m^2/s^3}$，$q_y=2\ \mathrm{m^2/s^3}$，$q_z=0.2\ \mathrm{m^2/s^3}$。在采样前 300 s 保持匀速直线运动，之后 z 方向高度不变，产生在水平方向顺时针旋转的匀速圆周运动，角速度为 1(°)/s，持续 30 s，之后继续保持匀速直线运动。滤波器参数设置保持不变。

图 5 比较了目标在机动条件下，不同算法在不同角量测误差条件下的误差表现，其中，图 5(a)对比了不同算法在 500～720 s 时间内的时均 APE，图 5(b)对比了采样结束时不同算法的 APE，此时目标与观测平台之间距离为 305 km。在目标发生机动的条件下，可以看到各算法的性能表现仍大致保持一致。通过图 5 可以看到，非线性滤波的 EKF，CKF 在角测量误差小于 0.3°时，性能十分接近，优于伪线性滤波的 3D-IVKF 与 3D-UBKF，但随着角测量误差增大，误差的变化速度也高于这两种算法。图 5(a)可以看到，角测量误差从 0.1°到 0.25°的变化过程中，CKF 与 EKF 方法的误差较小；当角测量误差达到 0.3°时，3D-UBKF 的误差指标开始与 EKF，CKF 接近；而角测量误差为 0.35°时，EKF，CKF 的误差指标则与 3D-IVKF 接近。再观察角测量误差为 0.5°时各算法的误差指标，可以看到，EKF，CKF 的各项误差指标均高于 3D-IVKF 以及 3D-UBKF；其中，3D-UBKF 达到了最佳的跟踪效果，在整个角测量误差增大的过程中，3D-UBKF 的绝对位置误差以及采样结束时刻 APE 均几乎不发生变化。图 6 为角测量噪声为 0.5°时各算法的跟踪情况。



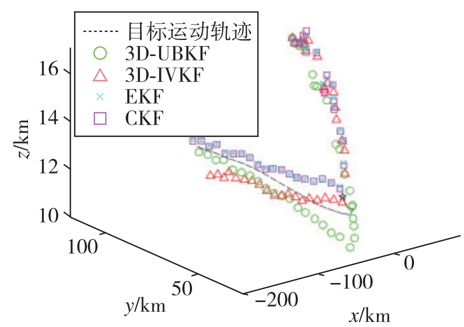
(a) time-ave APE 对比图



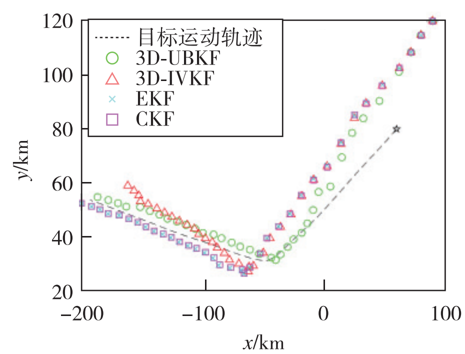
(b) 720 s 时 APE 对比图

图 5　目标机动时算法在不同角测量误差条件下的误差对比图

Fig. 5　Error comparison of algorithm under different angular measurement error conditions during target maneuvering



(a) 机动目标跟踪



(b) 机动目标跟踪水平投影

图 6　机动目标跟踪情况

Fig. 6　Maneuvering target tracking situation

根据算法对机动目标的仿真结果来看，在机动条件下，EKF，CKF 在角测量误差小于 0.3°时仍能表现出优异的定位跟踪性能，但当角测量误差大于 0.3°时，对算法的收敛速度影响较大；基于伪线性量测方程推导的 3D-IVKF 与 3D-UBKF 在小噪声条件下，定位跟踪性能上则稍微差一些，其中，3D-UBKF 由于结合了 EKF 的后验结果，在小噪声条件下保持住了 EKF 的优良性能，跟踪精度略低于 EKF，而明显优于 3D-IVKF；除此之外，由于伪线性滤波对角测量误差相对不敏感，当角测量误差达到 0.3°～0.5°时，3D-UBKF 与 3D-IVKF 的跟踪精度逐渐超过 EKF 与 CKF，而在大噪声条件下，3D-UBKF 又表现出优于 3D-IVKF 的跟踪性能，性能指标在各算法中最优。

进一步对各算法的运行效率进行统计，以 EKF 一次蒙特卡罗仿真的时间作为单位时间，将其他算法的一次蒙特卡罗仿真时间与之相除作为各算法的运行时间，得到各算法相对运行时间如表 4 所示。可以看出，在小噪声条件下，EKF 同时兼顾了运算速度快、定位估计精度高的优点。而基于伪线性滤波改进的 3D-IVKF 与 3D-UBKF 由于添加了其他运算，使得运行效率有所下降，但仍明显优于点估

计形式的 CKF。3D-UBKF 通过牺牲一定的运行速度和小噪声条件下的定位估计精度，达到了运行速度相对较快，且对噪声具有较强抗干扰能力的特点。

表 4 算法相对运行时间对比

Tab. 4 Comparison of algorithm relative running times

算法	EKF	CKF	3D-IVKF	3D-UBKF
相对运行时间	1.0	3.4	1.7	2.1

4 结论

本文通过仿真实验表明：

1)基于非线性滤波理论的 EKF,CKF 在小噪声条件下性能稳定，定位估计精度高，两种算法效果十分接近；但噪声较大时，这两种算法均会出现目标跟踪精度迅速下降的问题，对角测量噪声敏感。本文提出的 3D-UBKF 相比于 EKF,CKF，具有更强的抗干扰能力。

2)基于伪线性滤波的 3D-IVKF 与 3D-UBKF 均有效改善了普通 3D-PLKF 的有偏性问题，具有对角测量误差不敏感的优点，当角测量误差较大时，具有比 EKF,CKF 更加良好的目标跟踪性能，尤其是本文提出的 3D-UBKF，相比于 3D-IVKF 具有更高的目标跟踪精度。对于百公里级别的目标，当角测量误差从 0.1°变化到 0.5°，算法在仿真时间结束时均能将绝对位置误差降低至 10 km 以内。

3)3D-UBKF 由于利用了 EKF 对角度测量值预先进行了处理，增大了运算量，其运行效率介于 3D-IVKF 与 CKF 之间，具有与 EKF 同一个量级的运行速度。

综上所述，3D-UBKF 同时兼顾了目标定位跟踪精度、抗干扰能力以及运行速度，可以为远距离场景下的目标跟踪提供有效方法。

参考文献

[1] 李康，丁国如，李京华，等．无源定位技术发展动态及其应用分析[J]．航空兵器，2021，28(2)：104-112.
LI Kang, DING Guoru, LI Jinghua, et al. Development trends and application analysis of passive location technology [J]. Aviation Weapons, 2021, 28 (2): 104-112 (in Chinese).

[2] 张治，卢鸿谦，班晓军，等．基于 MEMS/GNSS 的多机协同无源定位[J]．光学精密工程，2021，29 (12)：2844-2854.
ZHANG Zhi, LU Hongqian, BAN Xiaojun, et al. Multi machine collaborative passive localization based on MEMS/GNSS [J]. Optical Precision Engineering, 2021, 29 (12): 2844-2854(in Chinese).

[3] 许诗文．200 km 红外目标被动测距[D]．西安：西安电子科技大学，2021.
XU Shiwen. Passive ranging of 200 km infrared target [D]. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology, 2021(in Chinese).

[4] LINGREN A, GONG K. Position and velocity estimation via bearing observations[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1978, AES-14(4): 564-577.

[5] LIN X, KIRUBARAJAN T, BAR-SHALOM Y, et al. Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem[J]. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2007, 4728: 240-250.

[6] AIDALA V, NARDONE S. Biased estimation properties of the pseudolinear tracking filter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1982, AES-18(4): 432-441.

[7] NGUYEN N H, DOGANCAY K. Improved pseudolinear Kalman filter algorithms for bearings-only target tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(23): 6119-6134.

[8] NGUYEN N H, DOGANCAY K. Instrumental variable based Kalman filter algorithm for three-dimensional AOA target tracking[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2018, 25(10): 1605-1609.

[9] 郭戈，王兴凯，徐慧朴．基于递归工具变量卡尔曼滤波算法的纯方位水下目标跟踪[J]．控制与决策，2020(1)：8.
GUO Ge, WANG Xingkai, XU Huipu. Azimuth only underwater target tracking based on recursive instrumental variable Kalman filtering algorithm [J]. Control and Decision Making, 2020 (1): 8(in Chinese).

[10] PANG F, DOGANCAY K, NGUYEN N H, et al. AOA pseudolinear target motion analysis in the presence of sensor location errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 3385-3399.

[11] VAGHEFI R M, GHOLAMI M R, STROM E G. Bearing-only target localization with uncertainties in observer position[C]// Istanbul: 2010 IEEE 21st International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Workshops. IEEE, 2010.

[12] WANG Y, HO K C. An asymptotically efficient estimator in closed-form for 3-D AOA localization using a sensor network[J]. IEEE Transactions on Wireless

Communications，2015，14(12)：6524-6535.

[13] HUANG Z，CHEN S，HAO C，et al. Bearings-only target tracking with an unbiased pseudolinear Kalman filter[J]. Remote Sensing，2021，13(15)：2915.

[14] PAYNE A N. Observability conditions for angles-only tracking[C]//Pacific Grove：Asilomar Conference on Signals. IEEE Computer Society，1988.

[15] ARASARATNAM I，HAYKIN S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2009，54(6)：1254-1269.

（编辑：孟彬）