

一种高低轨卫星联合到达时间被动定位技术

邢瑞阳, 吴启星, 翟 华

(北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094)

摘要: 针对高低轨卫星被动定位情况下时钟同步精度很难满足定位精度需求的问题, 综合考虑卫星系统误差, 建立了兼顾目标位置坐标和未知传输时间的加权最小二乘定位方程, 采用变换测量模型, 引入半正定松弛算法将传统加权最小二乘问题松弛为半正定规划 (SDP) 问题, 并证明该半正定松弛过程总是紧的, 保证原始问题最优解。同时, 将目标运动速度在较短观测时间内假设为常数, 将所提方法推广到运动目标被动定位场景。所提算法可有效解决时钟同步误差情况下卫星定位性能恶化的问题, 仿真结果表明: 在非极度恶劣噪声水平下, 所提方法的定位精度可达到克拉美罗下界。

关键词: 到达时间; 目标被动定位; 加权最小二乘; 半正定松弛

中图分类号: TN 927 **文献标志码:** A

DOI: 10.19328/j.cnki.2096-8655.2022.02.018

A Passive Localization Technology by Low and High Orbit Satellites Based on Time-of-Arrival Measurement

XING Ruiyang, WU Qixing, ZHAI Hua

(Beijing Institute of Tracking and Communication Technology, Beijing 100094, China)

Abstract: To address the time-of-arrival (TOA) based localization problem when the low and high orbit satellites are not synchronized, a non-convex weighted least squares (WLS) localization equation is proposed, which in view of both the target position coordinates and the unknown transmission time. A transformation measurement model and the semi-definite relaxation (SDR) algorithm are used to relax the WLS problem into a convex semi-definite programming (SDP), which has been proved to be always tight, and thus the optimal solution of the WLS problem can always be obtained. Furthermore, the proposed method is extended to a moving target localization scenario, where the target velocity is assumed to be constant in a short observation period. The proposed algorithm can effectively solve the problem of deteriorating satellite localization performance under the condition of clock synchronization error. The simulation results show that the localization accuracy of the proposed method can reach the Cramer-Rao lower bound accuracy when the noise is not very large.

Key words: time-of-arrival (TOA); passive target localization; weighted least squares; semi-definite relaxation

0 引言

近年来, 随着全球航天技术、空间互联网技术的发展, 一方面空间定位技术因具有覆盖范围广、受气候影响小、目标监测直视条件良好等独特优势, 受到各国的广泛关注与研究投入^[1]; 另一方面, 目标被动定位技术在雷达、声纳、目标跟踪、物联网等方面都起着至关重要的作用^[2-5]。随着空间卫星资源的逐渐丰富, 如何充分发挥高低轨卫星联合定

位构型的庞大定位基线优势, 构建高低轨卫星一体化联合定位机制, 以被动获取目标高精度位置信息, 成为国内外学术研究关注热点。

分析目标被动定位的诸多方法, 信号到达时间 (Time-of-Arrival, TOA) 方法因其精度高而被认为最常用定位方法之一。一方面, 传统 TOA 定位技术需要定位传感器和目标之间满足精确时间同步条件, 但该条件在实际应用中很难保障; 另一方面, 在

收稿日期: 2022-01-15; 修回日期: 2022-03-03

作者简介: 邢瑞阳 (1971—), 女, 硕士, 副研究员, 主要研究方向为空间信息处理技术。

非合作定位场景下,因目标的不可控特性,定位传感器和目标之间时间同步不可能实现。高低轨卫星联合空间被动定位场景下,目标无法受定位系统控制而与定位传感器之间保持精确时间同步。因此,针对目标与定位传感器时钟异步的实际问题,本文研究基于高低轨卫星联合 TOA 测量的被动定位算法。

在高低轨卫星联合定位系统内,若定位卫星和目标之间不满足时钟同步条件,将引入一个额外参数,称为目标信号起始传输时间。一种处理方法便是选择某卫星的 TOA 测量值为参考量,在参考量和其他卫星的 TOA 测量值之间做减法得到到达时间差(Time Difference of Arrival, TDOA)测量值,但该方法使得定位解析方程非线性关系更加复杂,且会受高低轨定位卫星构型严重影响,使得问题更加难以解决^[6]。另一种处理方法是对目标位置与未知起始传输时间进行联合估计。例如,XU 等^[7]提出了利用半正定松弛(Semi-Definite Relaxation, SDR)技术将定位问题松弛为一个凸半定规划(Semi-Definite Program, SDP)问题,通过对不同目标函数求最小值的方法,提出了 2 步最小二乘算法和最小-最大算法,由于求解过程中的近似和松弛,这 2 种算法都有一定性能损失。WANG 等^[8]通过最小化噪声项的 ℓ_2 范数和 ℓ_∞ 范数,提出了 2 种二阶锥松弛(Second-Order Cone Relaxation, SOCR)方法,由于求解过程中进行了松弛操作,这些方法也无法达到克拉美罗下界(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)精度。GAO 等^[9]将 SOCR 方法扩展到具有非视距误差的定位场景。VAGHEFI^[10]提出了一种不同的 SDR 方法,将 SDR 应用于最大似然(Maximum Likelihood, ML)问题,但该方法无法达到 ML 问题最优解和 CRLB 精度。ZOU 等^[11]通过增加二阶约束和惩罚项,对文献[10]中的松弛 SDP 问题进行了约束,在提高算法的性能的同时也增加了计算复杂度。YAN 等^[12]提出了一种使用量化 TOA 测量来减少通信开销的 SDR 方法,该方法也使用了未知起始传输时间的类似模型。

此外,目标被动定位问题需要确切可知传感器确切位置坐标,且要求不同传感器之间保持高精度时钟同步,但在很多实际应用中,这两点要求往往很难满足^[13-15]。在高低轨联合定位系统中,低轨卫星高速运动特性使其在特定采样时刻的位置与速度信息存在一定误差,且高低轨不同卫星由于初始设计目的与方案存在差异性,使其之间不可避免地

存在一定时统误差。在此,我们将卫星星历误差与时钟同步误差统一称为系统误差。国内外诸多文献已证明,较小的系统误差都会严重恶化目标定位精度^[16-19],这种情况下,定位算法需将定位传感器系统误差统计知识考虑进来以提升定位精度^[20-22]。

针对上述问题,本文提出一种面向高低轨卫星联合目标被动定位的 SDR 方法,以达到存在误差情况下提升系统性能的目的。本文在模型构建中针对时钟同步误差和卫星位置误差分别设置参数,在算法解算中首先优化求解误差参数,然后完成目标定位,并通过仿真证明了本文方法在误差条件下提高系统性能的有效性。与文献[7]和文献[10-11]中采用的 SDR 方法不同的是,本文所提出松弛 SDP 问题在理论上始终是紧的,从而保证了算法具有良好定位解析收敛性能。首先,所提新方法对被动定位测量模型进行变换,在变换后测量模型基础上提出加权最小二乘(Weighted Least Squares, WLS)问题;继而,将 SDR 技术应用到 WLS 问题中,得到一个松弛 SDP 问题,从理论上讲,松弛 SDP 问题总是紧的,因此它的最优解总是满足原始 WLS 问题解;然后,在此基础上,将所提方法扩展到运动目标定位场景。具体而言,假设目标速度在足够小观测周期内为常数,以联合估计目标初始位置、运动速度和未知起始传输时间。从理论上讲,虽然该场景下松弛 SDP 问题可能并不紧,但仿真结果表明,本文所采用的非凸问题简化方法可在很大程度上保证松弛中的秩 1 条件,除非测量误差非常大或卫星数目非常少,否则松弛 SDP 问题仍然是紧的,即本文方法针对运动目标在该场景下仍具有良好解析性能。

本文中,黑体小写字母为向量,黑体大写字母为矩阵。 $A_{(i,j)}$ 为矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素, $A_{(i,j,m,n)}$ 为矩阵 A 中从第 i 行至第 j 行、从第 m 列至第 n 列元素组成的子矩阵, $\text{tr}(A)$ 和 $\text{rank}(A)$ 分别为矩阵 A 的迹和矩阵 A 的秩, $A \succeq 0$ 为矩阵 A 半正定。

1 高低轨卫星联合被动定位模型

1.1 静止目标情况

在时间异步的情况下,基于高低轨卫星联合的 TOA 测量被动定位模型如图 1 所示,高低轨卫星联合定位网络存在 N 个卫星和一个位置未知的目标。假设第 i 个卫星和目标位置真实坐标分别用 s_i ($i =$

1, 2, \dots, N) 和 x 表示, 若将时统误差等价视为位置误差一部分, 可令 \tilde{s}_i 为带误差卫星位置, 且

$$\tilde{s}_i = s_i + \Delta s_i \quad (1)$$

式中: Δs_i 为第 i 个卫星位置误差。

设 Δs_i 均值为零, 协方差矩阵为 Σ_i , 即 $\Sigma_i = E[\Delta s_i \Delta s_i^T]$, 进一步, 记 $\Delta s = [\Delta s_1^T, \Delta s_2^T, \dots, \Delta s_N^T]^T$, 且假设 Δs_i 与 $\Delta s_j (i \neq j)$ 不相关, 则 Δs 为零均值随机向量, 其协方差矩阵为

$$\Sigma = E[\Delta s \Delta s^T] = \text{blkdiag}\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N\} \quad (2)$$

式中: blkdiag 为块对角矩阵。

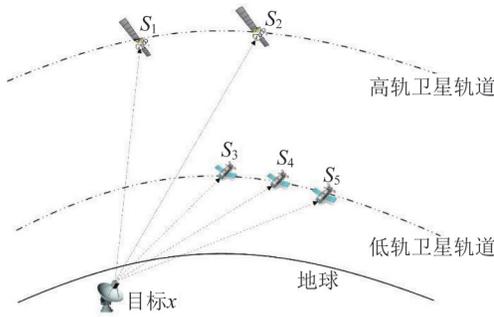


图1 基于高低轨卫星联合的 TOA 被动定位模型

Fig.1 Schematic diagram of the passive localization model by low and high orbit satellites based on TOA

不考虑卫星系统误差时, 含有未知起始传输时间的 TOA 测量模型可以表示为^[7-8, 10-12]

$$t_i = \frac{1}{c} \|x - s_i\| + t_0 + n_i \quad (3)$$

式中: c 为已知的信号传播速度; t_0 为未知的目标信号起始传播时间; n_i 为 TOA 测量噪声, 通常假设 n_i 服从均值为零和方差为 σ_i^2/c^2 的高斯分布, 并且 n_i 和 $n_j (i \neq j)$ 相互独立。

考虑卫星系统误差时, 将 $s_i = \tilde{s}_i - \Delta s_i$ 代入式(3)得

$$t_i = \frac{1}{c} \|x - \tilde{s}_i + \Delta s_i\| + t_0 + n_i \quad (4)$$

两边同乘以 c 得到第 i 个卫星与目标之间距离测量值为

$$d_i = \|x - \tilde{s}_i + \Delta s_i\| + d_0 + e_i \quad (5)$$

式中: $d_i = ct_i$; $d_0 = ct_0$; $e_i = cn_i$, 且 e_i 服从相互独立, 均值为零, 方差为 σ_i^2 的高斯分布。

对式(5)作关于 Δs_i 的 ℓ_2 范数泰勒展开有

$$d_i = \|x - \tilde{s}_i\| + d_0 + \frac{(x - \tilde{s}_i)^T \Delta s_i}{\|x - \tilde{s}_i\|} + e_i =$$

$$\|x - \tilde{s}_i\| + d_0 + \epsilon_i \quad (6)$$

式中: $\epsilon_i = f_i^T \Delta s_i + e_i$ 可视作新的总体误差量, $f_i = (x - \tilde{s}_i) / \|x - \tilde{s}_i\|$, ϵ_i 包含了系统误差与测量误差。进一步假设 Δs_i 与 e_i 不相关, 则 $\sigma_{\epsilon_i}^2 = E[\epsilon_i^2] = f_i^T \Sigma_i f_i + \sigma_i^2$ 。

若令 $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N]^T$, 则误差向量 ϵ 的协方差矩阵为

$$Q_\epsilon = E[\epsilon \epsilon^T] = \text{diag}\{\sigma_{\epsilon_1}^2, \sigma_{\epsilon_2}^2, \dots, \sigma_{\epsilon_N}^2\} = F \Sigma F^T + Q \quad (7)$$

其中,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{(x - \tilde{s}_1)^T}{\|x - \tilde{s}_1\|} \\ \frac{(x - \tilde{s}_2)^T}{\|x - \tilde{s}_2\|} \\ \vdots \\ \frac{(x - \tilde{s}_N)^T}{\|x - \tilde{s}_N\|} \end{bmatrix}$$

$$Q = \text{blkdiag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2\} \quad (8)$$

根据式(6), x 和 d_0 的最大似然 ML 估计可表示为

$$\min_{x, d_0} \sum_{i=1}^N (d_i - \|x - s_i\| - d_0)^2 / \sigma_{\epsilon_i}^2 \quad (9)$$

显然, 该问题是非凸的, 如果没有良好的初始解为保障, 很难保证解析过程得到其全局最优解。

1.2 运动目标情况

将静止目标的高低轨卫星联合定位模型推广至运动目标情况, 假设某目标在足够小观测时间内以恒定速度运动, 其在 k 时刻的位置用 x_k 表示, 即^[23-24]

$$x_k = x_0 + kT\mathbf{v}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (10)$$

式中: x_0 为目标初始位置; \mathbf{v} 为运动速度; T 为采样周期; K 为观测总次数。当目标移动缓慢或采样周期足够小时, 假设速度恒定是成立的。

根据式(8), 不考虑卫星系统误差时, 定位卫星与目标之间距离测量模型可表示为

$$d_{i,k} = \|x_k - s_i\| + d_k + e_{i,k} = \|x_0 + kT\mathbf{v} - s_i\| + d_0 + kTc + e_{i,k} \quad (11)$$

式中: $d_k = d_0 + kTc$ 为 k 时刻由未知起始传输时间引起的距离偏差; $e_{i,k}$ 为第 i 个卫星在 k 时刻的到达距离测量误差。同样, 假设 $e_{i,k}$ 服从均值为零, 方差

为 $\sigma_{i,k}^2$ 的高斯分布。

考虑卫星系统误差时,将 $s_i = \tilde{s}_i - \Delta s_i$ 代入式(9)得

$$\begin{aligned} d_{i,k} = & \left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i + \Delta s_i \right\| + \\ & d_0 + kTc + e_{i,k} = \\ & \left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i \right\| + d_0 + \\ & kTc + \frac{(\mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i)^T \Delta s_i}{\left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i \right\|} + e_{i,k} = \\ & \left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i \right\| + \\ & d_0 + kTc + \varepsilon_{i,k} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_1)^T}{\left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_1 \right\|} & & & \\ & \frac{(\mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_2)^T}{\left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_2 \right\|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{(\mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_N)^T}{\left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_N \right\|} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q} = \text{blkdiag} \{ \sigma_{1,1}^2, \dots, \sigma_{N,1}^2, \dots, \sigma_{1,K}^2, \dots, \sigma_{N,K}^2 \} \quad (14)$$

将式(10)等价转化为

$$\bar{d}_{i,k} = \left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i \right\| + d_0 + \varepsilon_{i,k} \quad (15) \quad \text{其中,}$$

式中: $\bar{d}_{i,k} = d_{i,k} - kTc$ 。

与静止目标定位场景类似,运动目标定位的最大似然 ML 估计可表示为

$$\min_{\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, d_0} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N (\bar{d}_{i,k} - \left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i \right\| - d_0)^2 / \sigma_{i,k}^2 \quad (16)$$

2 基于 SDR 的被动目标定位算法

在本章中,首先提出用于静止目标被动定位的 SDR 方法,然后将其扩展到运动目标被动定位场景。

2.1 静止目标定位场景

在到达距离测量模型(6)中,将 $d_0 + \varepsilon_i$ 移到左边,然后两边平方,有

$$\begin{aligned} d_i^2 - 2d_i d_0 + d_0^2 - \left\| \mathbf{x} \right\|^2 + 2\tilde{s}_i^T \mathbf{x} - \\ \left\| \tilde{s}_i \right\|^2 \approx 2(d_i - d_0)\varepsilon_i \end{aligned} \quad (17)$$

这里忽略二阶噪声项 ε_i^2 ,因为它通常比一阶噪声项 $(d_i - d_0)\varepsilon_i$ 小得多^[8]。

通过引入向量 $\mathbf{y} = [\mathbf{x}^T, d_0, \left\| \mathbf{x} \right\|^2 - d_0^2]^T \in \mathbb{R}^{n+2}$,将式(13)写成如下矩阵形式:

式中: $\varepsilon_{i,k} = \mathbf{f}_{i,k}^T \Delta s_i + e_{i,k}$ 可视作新的总体误差量, $\mathbf{f}_{i,k} = (\mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i) / \left\| \mathbf{x}_0 + kT\mathbf{v} - \tilde{s}_i \right\|$, $\varepsilon_{i,k}$ 包含了系统误差与 k 时刻测量误差。进一步假设 Δs_i 与 $e_{i,k}$ 不相关,则 $\sigma_{\varepsilon_{i,k}}^2 = E[\varepsilon_{i,k}^2] = \mathbf{f}_{i,k}^T \Sigma_i \mathbf{f}_{i,k} + \sigma_{e_{i,k}}^2$ 。

若令 $\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{N,1}, \dots, \varepsilon_{1,K}, \dots, \varepsilon_{N,K}]^T$, 则误差向量 $\hat{\varepsilon}$ 的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\varepsilon = E[\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^T] = \text{diag} \{ \sigma_{\varepsilon_{1,1}}^2, \dots, \sigma_{\varepsilon_{N,1}}^2, \dots, \sigma_{\varepsilon_{1,K}}^2, \dots, \sigma_{\varepsilon_{N,K}}^2 \} = \\ \hat{F}\Sigma\hat{F}^T + \hat{Q} \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b} \approx \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (18)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\tilde{s}_1^T & -2d_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\tilde{s}_N^T & -2d_N & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \left\| \tilde{s}_1 \right\|^2 - d_1^2 \\ \vdots \\ \left\| \tilde{s}_N \right\|^2 - d_N^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = 2\text{diag} \{ d_1 - d_0, \dots, d_N - d_0 \} \quad (19)$$

根据式(14),得到以下 WLS 问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} (\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}) \\ \text{s.t. } \mathbf{y}_{(n+2)} = \left\| \mathbf{y}_{(1:n)} \right\|^2 - \mathbf{y}_{(n+1)}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

式中: $\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_\varepsilon\mathbf{B}^T$ 。

令

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y}\mathbf{y}^T \in \mathbb{S}^{n+2}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{n+3}$$

将式(15)写成以 \mathbf{Z} 为变量的优化问题,即

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z} \in \mathbb{S}^{n+3}} \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{Z}) \\ \text{s.t. } \mathbf{Z}_{(n+2, n+3)} = \text{tr}(\mathbf{Z}_{(1:n, 1:n)}) - \mathbf{Z}_{(n+1, n+1)} \\ \mathbf{Z}_{(n+3, n+3)} = 1 \\ \mathbf{Z} \succeq 0 \end{aligned}$$

$$\text{rank}(Z)=1 \tag{21}$$

式中: $F = \begin{bmatrix} A^T R^{-1} A & -A^T R^{-1} b \\ -b^T R^{-1} A & b^T R^{-1} b \end{bmatrix}$

在问题(16)中,目标函数关于 Z 是线性的,唯一的非凸约束是秩1约束。去掉式(16)中的秩1约束,得到凸SDP问题:

$$\begin{aligned} \min_{Z \in \mathbb{S}^{n+3}} \text{tr}(FZ) \\ \text{s.t. } Z_{(n+2, n+3)} &= \text{tr}(Z_{(1:n, 1:n)}) - Z_{(n+1, n+1)} \\ Z_{(n+3, n+3)} &= 1 \\ Z &\succeq 0 \end{aligned} \tag{22}$$

权重 R^{-1} 包含未知参数 $t_0 = d_0/c_0$ 。在实际应用中,我们首先将 R 设为 Q_ϵ 来求解问题(17),得到 t_0 的初始解,然后将 t_0 的初始解代入 R ,再次求解问题(17),得到目标位置最终估计。需注意,算法性能通常对加权矩阵的近似不敏感^[25]。

将SDP问题(17)的解表示为 Z^* , Z^* 的秩表示为 ℓ 。根据文献[26], ℓ 取决于等式约束的个数 m ,具体来说,它们的关系满足 $\ell(\ell+1) \leq 2m$ 。可见问题(17)有两个等式约束(即 $m=2$),这就意味着问题(17)的最优解总是秩为1的。因此,松弛后的SDP问题总是紧的,而WLS问题(15)的最优解总是可以通过 $y^* = Z^*_{(1:(n+2), (n+3))}$ 从SDP解 Z^* 中得到。相应地,可以通过 $x^* = Z^*_{(1:n, n+3)}$ 得到目标位置估计。

2.2 运动目标定位场景

与静止目标定位场景类似,由式(11)得

$$\begin{aligned} \bar{d}_{i,k}^2 - 2\bar{d}_{i,k}d_0 + d_0^2 - (\bar{d}_{i,k} - d_0)\epsilon_{i,k} \approx \\ \|x_0\|^2 - 2kTx_0^T v + k^2T^2\|v\|^2 - \\ 2\bar{s}_i^T(x_0 + kTv) + \|\bar{s}_i\|^2 \end{aligned} \tag{23}$$

令

$$\bar{y} = [x_0^T, v^T, d_0, \|x_0\|^2 - d_0^2, \|v\|^2, x_0^T v]^T \in \mathbb{R}^{2n+4}$$

将式(18)写成如下矩阵形式:

$$G \cdot \bar{y} - h \approx D\hat{\epsilon} \tag{24}$$

其中,

$$\begin{aligned} D &= 2\text{diag}\{d_{1,1} - d_0, \dots, d_{N,1} - d_0, \dots, \\ &\quad d_{1,K} - d_0, \dots, d_{N,K} - d_0\} \\ G &= \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_K \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_K &= \begin{bmatrix} 2\bar{s}_1^T & 2kT\bar{s}_1^T & -2\bar{d}_{1,k} & -1 & -k^2T^2 & 2kT \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\bar{s}_N^T & 2kT\bar{s}_N^T & -2\bar{d}_{N,k} & -1 & -k^2T^2 & 2kT \end{bmatrix} \\ h_k &= \begin{bmatrix} \|\bar{s}_1\|^2 - \bar{d}_{1,k}^2 \\ \vdots \\ \|\bar{s}_N\|^2 - \bar{d}_{N,k}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

令 $\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Y} & \bar{y} \\ \bar{y}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{2n+5}$, $\bar{Y} = \bar{y}\bar{y}^T \in \mathbb{S}^{2n+4}$, 根据

式(19)可以得到一个有约束WLS问题:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{Z} \in \mathbb{S}^{2n+5}} \text{tr}(H\bar{Z}) \\ \text{s.t. } \bar{Z}_{(2n+2, 2n+5)} &= \text{tr}(\bar{Z}_{(1:n, 1:n)}) - \bar{Z}_{(2n+1, 2n+1)} \\ \bar{Z}_{(2n+3, 2n+5)} &= \text{tr}(\bar{Z}_{((n+1); 2n, (n+1); 2n)}) \\ \bar{Z}_{(2n+4, 2n+5)} &= \text{tr}(\bar{Z}_{(1:n, (n+1); 2n)}) \\ \bar{Z}_{(2n+5, 2n+5)} &= 1 \\ \bar{Z} &\succeq 0 \\ \text{rank}(\bar{Z}) &= 1 \end{aligned} \tag{26}$$

式中: $H = \begin{bmatrix} G^T \hat{R}^{-1} G & -G^T \hat{R}^{-1} h \\ -h^T \hat{R}^{-1} G & b^T \hat{R}^{-1} h \end{bmatrix}$, $\hat{R} = DQ_\epsilon D^T$ 。

类似地,去掉秩1约束得到以下凸SDP:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{Z} \in \mathbb{S}^{2n+5}} \text{tr}(H\bar{Z}) \\ \text{s.t. } \bar{Z}_{(2n+2, 2n+5)} &= \text{tr}(\bar{Z}_{(1:n, 1:n)}) - \bar{Z}_{(2n+1, 2n+1)} \\ \bar{Z}_{(2n+3, 2n+5)} &= \text{tr}(\bar{Z}_{((n+1); 2n, (n+1); 2n)}) \\ \bar{Z}_{(2n+4, 2n+5)} &= \text{tr}(\bar{Z}_{(1:n, (n+1); 2n)}) \\ \bar{Z}_{(2n+5, 2n+5)} &= 1 \\ \bar{Z} &\succeq 0 \end{aligned} \tag{27}$$

由式(21)可得目标初始位置和速度分别为

$$\begin{aligned} x_0^* &= \bar{Z}^*_{(1:n, 2n+5)} \\ v^* &= \bar{Z}^*_{(n+1; 2n, 2n+5)} \end{aligned} \tag{28}$$

与静止目标定位场景不同,运动目标定位的松弛SDP问题可能无法保证秩1解。然而,第4章的仿真结果表明,在非极度恶劣噪声水平下,该SDP问题仍然可以得到秩1解,这意味着所提的SDP方法可推广应用于运动目标的场景。

3 计算机仿真结果与性能分析

本章将通过仿真来验证本文所提算法性能(用“SDP”表示),静止目标和运动目标均进行了测试分析。针对静止目标定位场景,还验证了二阶锥规划(Second-Order Cone Programming, SOCP)方法性能。在2种情况下,分别跟MLE性能和CRLB性能进行了对比。SDP和SOCP由CVX工具箱^[27]的

SeDuMi^[28]进行求解;以起始传播时间真值与SDP算法解得目标位置结果为初始值,MLE问题利用Matlab中的snowline函数求解,并选择代价函数值较小的解作为MLE问题的最终解。

各种算法的性能采用均方根误差(Root Mean Squared Error, RMSE)为标准进行评价,其定义为

$$R_{\text{MSE}} = \sqrt{\sum_{j=1}^J \|\hat{\theta}_j - \theta\|^2} \quad (29)$$

式中: $\hat{\theta}_j$ 为第 j 次蒙特卡洛(Monte Carlo, MC)运行时,未知目标位置或速度真值 θ 的估计值; J 为蒙特卡洛仿真次数。在接下来仿真中,进行 $J=500$ 次MC运行来评估RMSE。

3.1 静止目标定位场景

为充分验证本文所提算法针对静止目标定位性能,所定义地心地固坐标系下定位场景见表1。

表1 地心地固坐标系下定位节点位置坐标

Tab.1 Location coordinates of the localization nodes in the earth-centered solid coordinate system

节点	1	2	3	4	5
X/km	-7 322.09	-10 913.43	-2 989.06	-2 980.46	-2 971.27
Y/km	41 525.66	40 729.48	5 435.52	5 388.86	5 341.14
Z/km	0	0	3 196.09	3 281.98	3 367.23

假设高低轨联合定位系统包括3颗前后伴飞低轨卫星(节点3、4、5),还包括经度为 100° 、 105° 的2颗地球同步卫星(节点1、2),而被定位目标位于 $x = [-2\ 384.94, 5\ 016.75, 3\ 124.36]^T$ km。很明显,目标位置位于高低轨卫星构型凸包外,这是一个难以精确定位的构型配置。距离测量由式(6)得到,其中 d_0 是根据均值为10 m的指数分布随机生成的,需要说明的是, d_0 的取值对目标位置估计精度没有任何影响。不失一般性,假设距离测量的误差方差 σ_i^2 是相同的,即 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_N^2 = \sigma^2$,并假设卫星系统误差 Δs_i 协方差矩阵 Σ_i 相同,即 $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_N = \sigma_s^2 I_3$, I_3 为3维单位阵。

首先仿真验证5颗高低轨卫星数目联合, $\sigma_s^2 = 9\text{ m}^2$,距离测量误差方差 σ^2 在 $10^0 \sim 10^4\text{ m}^2$ 变化时本文所提算法性能结果如图2所示。可以看出,所提算法始终能够达到CRLB精度和极大似然估计(Maximum Likelihood Estimate, MLE)算法精度,而SOCP方法即使在噪声非常小的误差情况下也不

能达到CRLB精度,这主要归因于本文所提出SDP算法总是能够得到一个秩1解。因此,本文所提算法通过首先优化求解时钟同步误差,并采用凸松弛方法解算定位方程,可实现误差条件下高低轨卫星联合TOA高精度定位,有效提升了存在误差情况下系统的定位性能。

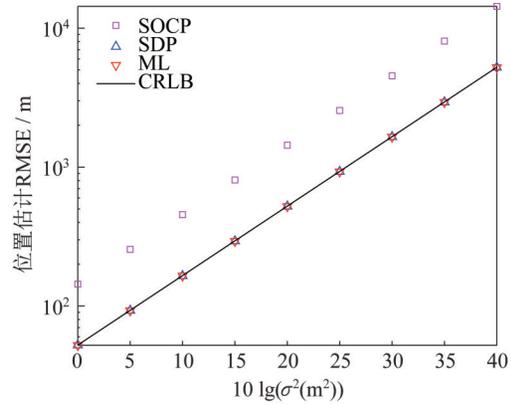


图2 各算法随测量噪声变化的RMSE比较(静止目标定位场景)

Fig.2 RMSE comparison of different algorithms with the measurement noise (stationary target localization scenario)

3.2 运动目标定位场景

本节仿真验证本文所提算法针对运动目标定位性能。卫星节点和目标初始位置的生成方式与静止目标定位场景完全相同,目标运动速度在 $(-200, 200) \times (-200, 200) \times (-200, 200)$ (m/s)³范围内随机产生,不失一般性,假设不同时刻的距离测量误差方差 $\sigma_{i,k}^2$ 是相同的,即 $\sigma_{1,1}^2 = \dots = \sigma_{N,1}^2 = \dots = \sigma_{1,K}^2 = \dots = \sigma_{N,K}^2 = \sigma^2$ 。

与静止目标定位场景相似,本节对距离测量噪声变化情况进行仿真验证。同样选择上述5颗高低轨卫星, $\sigma_s^2 = 9\text{ m}^2$,总观测次数 $K=6$,目标位置估计和速度估计结果均方根误差如图3所示。从图中可以看出,本文所提出的SDP方法在噪声较大的情况下仍能达到CRLB性能和MLE算法精度。

为了进一步研究估计性能,本文还仿真验证了当距离测量噪声方差为 $\sigma^2 = 10^{2.5}\text{ m}^2$ 时,SDP和MLE方法目标位置和速度估计误差的累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF)的仿真验证,结果如图4所示。

可以看出,与MLE方法相比,SDP方法80%以

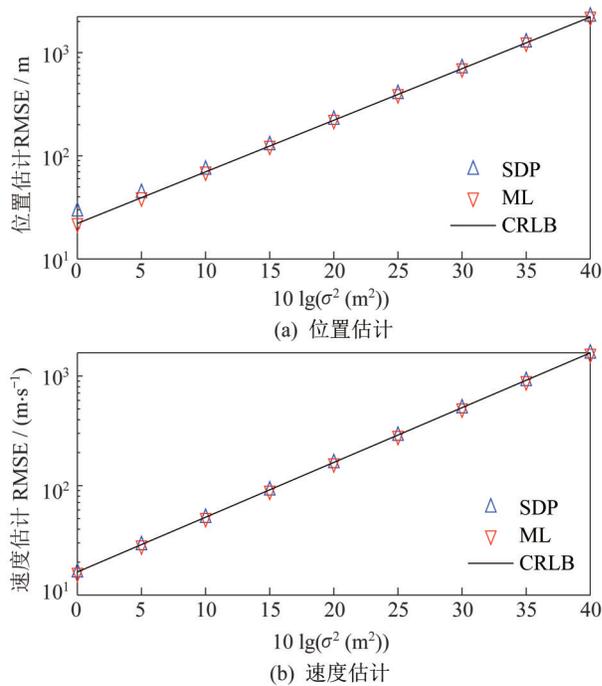


图 3 各算法随测量噪声变化时的 RMSE 比较(运动目标定位场景)

Fig.3 RMSE comparison of different algorithms with the measurement noise (moving target localization scenario)

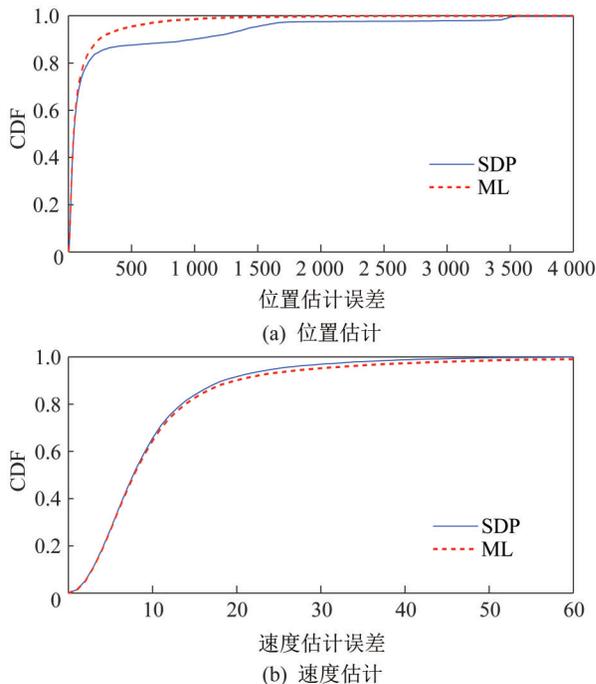


图 4 当 $\sigma^2 = 10^{2.5} \text{ m}^2$ 时算法随信源位置和速度估计误差变化 CDFs 对比(运动目标定位场景)

Fig.4 CDF comparison of different algorithms with the source location and velocity estimation error when $\sigma^2 = 10^{2.5} \text{ m}^2$ (moving target localization scenario)

上的目标位置估计误差在量级上与 MLE 算法具有可比性,这也从侧面说明即使在噪声较大的情况下 SDP 方法性能依然良好。此外,SDP 方法比 MLE 方法在目标速度估计方面的性能较优。

此外,验证了本文所采用的非凸问题简化方法能否满足秩 1 条件的情况,当 σ^2 以 5 为步长,从 0 到 40 变化,每次进行 1 000 次运算,仿真结果显示每次仿真均能达到 1 000 次秩 1 条件。可见,在噪声较小情况下,由于本文所采用的非凸问题简化方法可在很大程度上保证松弛中的秩 1 条件,尽管理论上不能保证得到秩 1 解,所提方法可以得到秩 1 解,这进一步验证了所提方法的可靠性。

4 结束语

本文以高低轨卫星联合定位为背景,针对未知初始传输时间的 TOA 定位问题,考虑卫星位置误差与时统误差等系统误差的情况下,提出了一种基于 SDR 的定位方法。通过建立非凸 WLS 最小化问题,将未知初始传输时间引起的距离偏差与目标位置、速度未知量进行联合估计,然后应用 SDR 算法求解。仿真结果表明,尽管在求解过程中进行了近似和松弛,在高低轨卫星联合定位场景下,该方法仍能达到 CRLB 精度和 MLE 算法精度。

参考文献

- [1] 郭福成,周一,樊昫.空间电子侦察定位原理[M].北京:国防工业出版社,2012.
- [2] MALANOWSKI M, KULPA K. Two methods for target localization in multistatic passive radar[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(1): 572-580.
- [3] CORALUPPI S. Multistatic sonar localization [J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2007, 31(4): 964-974.
- [4] JAJAMOVICH G H, WANG X. Joint multitarget tracking and sensor localization in collaborative sensor networks [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(4): 2361-2375.
- [5] WANG G, ZHU W C, ANSARI N. Robust TDOA-based localization for IoT via joint source position and NLOS error estimation [J]. IEEE Internet of Things Journal, 2019, 6(5): 8529-8541.
- [6] 孙鸿强,张占月,赵焕洲,等.海洋定位卫星性能分析[J].上海航天,2021,38(6):111-117.
- [7] XU E Y, DING Z, DASGUPTA S. Source

- localization in wireless sensor networks from signal time-of-arrival measurements [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(6): 2887-2897.
- [8] WANG G, CAI S, LI Y M, et al. Second-order cone relaxation for TOA-based source localization with unknown start transmission time [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2014, 63(6): 2973-2977.
- [9] GAO S C, ZHANG F, WANG G. NLOS error mitigation for TOA-based source localization with unknown transmission time[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2017, 17(12): 3605-3606.
- [10] VAGHEFI R M, BUEHRER R M. Asynchronous time-of-arrival-based source localization [C]// 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vancouver: IEEE, 2013: 4086-4090.
- [11] ZOU Y B, WAN Q. Asynchronous time-of-arrival-based source localization with sensor position uncertainties [J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(9): 1860-1863.
- [12] YAN Y S, YANG G, WANG H Y, et al. Semidefinite relaxation for source localization with quantized ToA measurements and transmission uncertainty in sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, 69(2): 1201-1213.
- [13] ZHOU Z, CUI J H, ZHOU S. Localization for large-scale underwater sensor networks [C]// International Conference on Research in Networking, Berlin, Heidelberg. 2007: 108-119.
- [14] LUI K W K, MA W K, SO H C, et al. Semi-definite programming approach to sensor network node localization with anchor position uncertainty[C]// 2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Taipei: IEEE, 2009: 2245-2248.
- [15] CHIU W Y, CHEN B S, YANG C Y. Robust relative location estimation in wireless sensor networks with inexact position problems [J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2012, 11(6): 935-946.
- [16] HO K C, LU X, KOVAVISARUCH L. Source localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: analysis and solution[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(2): 684-696.
- [17] ROCKAH Y, SCHULTHEISS P M. Array shape calibration using sources in unknown locations--part I: far-field sources[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1987, 35(3): 286-299.
- [18] 梁尔涛,张伟,施伟璜,等.基于低轨卫星增强的非差高精度导航定位技术与在轨试验验证[J].*上海航天*, 2019,36(1):16-22.
- [19] ROCKAH Y, SCHULTHEISS P M. Array shape calibration using sources in unknown locations--part II: near-field sources and estimator implementation [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1987, 35(6): 724-735.
- [20] JAKOBY A, GOLDBERG J, MESSER H. Source localization in shallow water in the presence of sensor location uncertainty [J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2000, 25(3): 331-336.
- [21] YANG K, WANG G, LUO Z Q. Efficient convex relaxation methods for robust target localization by a sensor network using time differences of arrivals [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(7): 2775-2784.
- [22] WENG Y, XIAO W D, XIE L H. Total least squares method for robust source localization in sensor networks using TDOA measurements [J]. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2011, 7(1): 1063-1067.
- [23] WU X P, WANG S H, FENG H L, et al. Motion parameter capturing of multiple mobile targets in robotic sensor networks [J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 24375-24390.
- [24] CHEN H T, WANG G, WU X P. Cooperative multiple target nodes localization using TOA in mixed LOS/NLOS environments[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2019, 20(3): 1473-1484.
- [25] HO K C, XU W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2453-2463.
- [26] BARVINOK A I. Problems of distance geometry and convex properties of quadratic maps [J]. *Discrete and Computational Geometry*, 1995, 13(2): 189-202.
- [27] GRANT M, BOYD S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming [EB/OL]. (2020-01-01) [2021-12-21]. <http://cvxr.com/cvx/>.
- [28] STURM J F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones[J]. *Optimization methods and software*, 1999, 11(1/2/3/4): 625-653.