# 深空天文测角测速组合自主导航可观测性分析方法

王 伟[1,2,3],马广富[1],张 伟[2,3],黄庆龙[2,3]
(1.哈尔滨工业大学 航天学院,黑龙江 哈尔滨 150001;2.上海卫星工程研究所,上海 201109;
3.上海市深空探测技术重点实验室,上海 200240)

**摘 要:** 导航系统的性能与其可观测性密切相关,而可观测矩阵是分析导航系统可观测性能的重要依据。本文基于分段线性定常系统(PWCS)方法给出导航系统的可观测矩阵,进而针对测角测速组合导航系统开展可观测性分析。通过分析测角测速组合导航系统可观测矩阵的秩和条件数,得到导航系统的可观测性和整体可观测度,并研究导航系统的可观测阶数对导航系统的影响;同时基于奇异值分解(SVD)方法给出测角测速组合导航系统各个状态分量的可观测性分析方法。最后,以小行星探测工程任务巡航段为背景,系统地给出了不同量测模型的导航系统可观测性结果,分析了不同可观测性分析方法对导航系统可观测性刻画的适用性。本文所提出的可观测性分析方法,对导航系统可观测性分析具有很好的参考性,可为组合导航系统量测模型的优选提供参考,具有良好的理论和应用价值。

**关键词:** 测角测速; 可观性; 自主导航; 小行星探测
**中图分类号:** TN 911.73; TP 391.9 **文献标志码:** A **DOI:** 10.19328/j.cnki.1006-1630.2020.04.002

## Observability Analysis Method of Angular and Range Rate Measurement Integrated Autonomous Navigation

WANG Wei[1,2,3], MA Guangfu[1], ZHANG Wei[2,3], HUANG Qinglong[2,3]
(1.School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, Heilongjiang, China;
2.Shanghai Institute of Satellite Engineering, Shanghai 201109, China;
3.Shanghai Key Laboratory of Deep Space Exploration Technology, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** The performance of navigation system is closely related to its observability, and the observability matrix is an important basis for analyzing the observability of navigation system. In this paper, the observability matrix of navigation system is given based on the piece-wise constant system (PWCS) method. Then, the observability analysis is carried out for the angular and range rate measurement integrated autonomous navigation. The observability of the navigation system are obtained by analyzing the rank and condition number of the observability matrix of the integrated navigation system, and the effect of the observability order of the navigation system on the navigation system is studied. Meanwhile, based on the singular value decomposition (SVD) method, the observability analysis method of each state component of the integrated navigation system is given. Finally, taking the cruise phase of asteroid exploration as the background, the observability of the navigation system with different measurement schemes are given systematically, and the applicability of different observability analysis methods to the description of the observability of navigation system is analyzed. The observability analysis method proposed in this paper has a good reference for the observability analysis of navigation system, and can provide a reference for the alternative optimization of the measurement scheme of integrated autonomous navigation system, which has a good theoretical and application value.

**收稿日期:** 2020-01-16; **修回日期:** 2020-02-22
**基金项目:** 科工局十三五民用航天预研项目(D030102);上海市科委科研计划资助项目(18DZ2272300)
**作者简介:** 王 伟(1983—),男,博士,高级工程师,主要研究方向为控制科学与工程。

**Key words:** angular and range rate measurement; observability; autonomous navigation; asteroid exploration

## 0　引言

探测器的自主导航是深空探测任务至关重要的问题，对提高深空探测导航精度、增强其在轨生存能力、降低任务风险有着极其重要的意义。深空探测器自主导航可以减少任务作业的复杂性，降低任务的成本，简化探测器的地面支持系统，提高深空探测的效率，是深空探测任务亟需的关键能力之一。

探测器一般不能够直接获得其自身在空间中的位置和速度关系，大多是利用相应的信息提取算法从光学图像、电磁波等量测量中获得相关的角度、视线矢量等有用信息，进而解算出探测器在空间中的位置和速度信息。但是，导航系统能否利用这些测量信息解算得到探测器的位置和速度等状态信息，取决于导航系统的可观测性。导航系统的可观测性分析是构建深空自主导航系统需要解决的首要问题[1]。

对于线性时变系统，可以利用分段定常系统（Piece-Wise Constant System，PWCS）得到可观测矩阵，即在一个足够小的时间区间内，将时变系统系数矩阵视为不变，此时时变系统可以作为定常系统处理。对于非线性时变系统，还可以利用李导数定义可观测矩阵[2]，但在实际应用中并不方便。对非线性系统进行局部线性化处理，LEE 等[3]论证了线性化系统可观测性与原系统是局部一致的。为了求解方便，可以利用PWCS将条带化可观测性矩阵（Stripped Observability Matrix，SOM）代替系统总的可观测性矩阵（Total Observability Matrix，TOM）分析可观测性[4]。

通过分析可观测矩阵的秩和条件数，可以得到整体系统的可观测性和可观测度，但不能得到系统的状态分量的可观测性和可观测度。范炜等[5]基于奇异值分解理论，推导并给出了线性时变系统及其状态变量的可观测度。崔平远等[6]基于李导数可观测矩阵，研究了系统及其状态变量的可观测度，但对导航系统状态分量可观测度的定义缺乏理论依据，而且李导数的迭代求导使多步观测的计算变得十分困难。

本文基于PWCS可观测矩阵，研究了测角测速组合自主导航系统可观测性分析方法，通过分析可观测矩阵的秩和条件数，得到组合导航系统的可观测性和整体可观测度；研究了导航系统的可观测阶数对导航系统的影响，结合奇异值分解（Singular Value Decomposition，SVD）理论给出组合导航系统各个状态分量的可观测度。本文以导航系统观测矩阵的条件数、导航系统的可观测阶数及导航系统各状态分量的可观测度为指标，综合分析了不同量测模型的导航系统可观测性。最后，以小行星探测工程任务巡航段为背景，给出了仿真分析和结论。

## 1　天文自主导航系统模型

### 1.1　系统状态模型

深空探测器自主天文测速导航系统的状态方程一般是依据卫星轨道动力学方程建立。在小行星探测巡航段，主要考虑太阳、地球、小行星等天体摄动，太阳光压摄动，探测器的修正推力等影响。

在 J2000 日心黄道惯性坐标系下，假设探测器位置 $\boldsymbol{r}=\left[x,y,z\right]^{\mathrm{T}}$，速度 $v=\left[v_x,v_y,v_z\right]^{\mathrm{T}}$，则状态变量 $X(t)=\left[x,y,z,v_x,v_y,v_z\right]^{\mathrm{T}}$，那么典型的轨道动力学方程可以表示为

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}\\&\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{u_{\mathrm{s}}}{r^3}\boldsymbol{r}+\sum_{i=1}^{N}\mu_i\left[-\frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i^3}+\frac{\boldsymbol{r}_{si}}{r_{si}^3}\right]+\boldsymbol{a}_{\mathrm{PSR}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{1}$$

式中：第 1 项为以太阳为引力中心的引力加速度项；第 2 项为考虑的行星第三体引力摄动加速度项；第 3 项为太阳光压摄动加速度项；最后一项为探测器推力加速度项。

综上，可以将探测器轨道动力学方程表述为如下一般形式：

$$\dot{X}(t)=f\left(X(t),t\right)+W(t)\tag{2}$$

式中：$W(t)$ 为状态模型噪声，一般作高斯白噪声处理。

### 1.2　导航系统量测模型

在深空探测任务中，自主导航系统的量测方案主要是对诸如太阳、恒星、行星以及小行星等参考天体进行测量。其中，将得到的光学图像信息或者角度信息转换为对应的视线矢量或者空间角度信

息[7],进而估计得到探测器位置和速度信息,即为测角导航方法,其原理如图1所示。将得到的光谱信息或频谱信息反演为探测器相对目标天体速度大小[8-10],并进而估计探测器位置和速度信息,即为测速导航方法,其原理如图2所示。

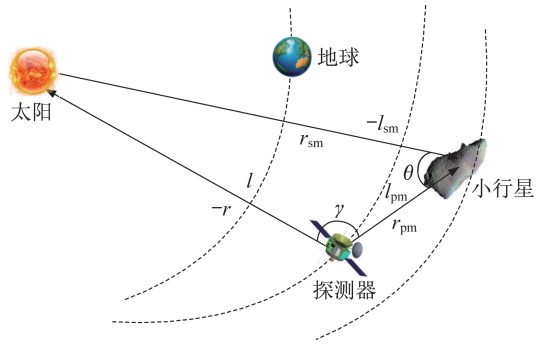



**图1 测角导航原理**

**Fig.1 Schematic diagram of angular measurement navigation**

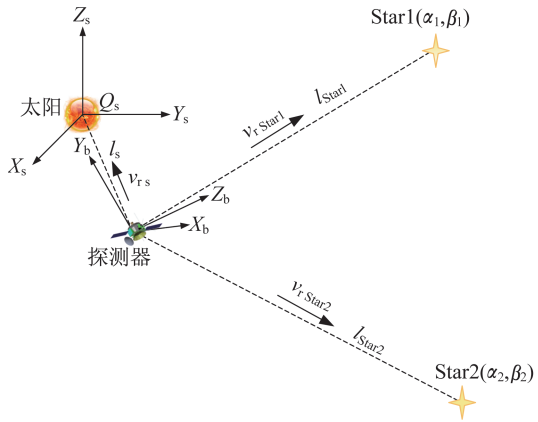



**图2 测速导航原理**

**Fig.2 Schematic diagram of range rate measurement navigation**

1.2.1 太阳视线矢量

基于太阳视线矢量的观测模型为

$$\boldsymbol{l}_s = -\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \boldsymbol{v}_{l_s} \tag{3}$$

式中:$v_{l_s}$为太阳视线矢量观测误差;$\boldsymbol{r}$为在参考惯性系下探测器相对太阳径向位置矢量。

1.2.2 对太阳视向速度

探测器相对太阳的运动中有多普勒效应[11],星载光谱仪可以直接获取多普勒效应引起的光谱频移变化,从而反演得到相对太阳的视向速度[12-13]。相对太阳的视向速度观测模型为

$$v_r = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{r} + v_{v_s} \tag{4}$$

式中:$v_{v_s}$为太阳视线矢量观测误差;$v_r$为探测器相对太阳的径向速度大小;$\boldsymbol{v}$为在参考惯性系下探测器的速度矢量;$\boldsymbol{r}$为在参考惯性系下探测器相对太阳径向位置矢量。

1.2.3 星视线矢量和相对恒星视向速度

考虑恒星在惯性参考坐标系中近乎不动,可以得到相对其他恒星的视线方向观测模型为

$$\boldsymbol{l}_{star} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r} + v_{l_{star}} \tag{5}$$

相对其他恒星的视向速度模型为

$$v_{r,star} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{r} + v_{v_{star}} \tag{6}$$

在深空探测导航任务中,可以基于单个或相互组合的方式作为导航系统的量测。

## 2 可观测性分析方法

一般的离散PWCS可用如下模型表示:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(k) &= \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{X}(k-1) + \boldsymbol{W}(k-1) \\ \boldsymbol{Z}_j(k) &= \boldsymbol{H}_j\boldsymbol{X}(k) + V(k) \end{aligned} \tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{X}(k)\in\mathrm{R}^n$;$\boldsymbol{A}_j\in\mathrm{R}^{n\times n}$;$\boldsymbol{W}(k)\in\mathrm{R}^l$;$\boldsymbol{Z}_j(k)\in\mathrm{R}^m$;$\boldsymbol{H}_j\in\mathrm{R}^{m\times n}$;$j=1,2,\cdots,r$表示系统分段间隔符。系统总的可观测性矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{Q}(r) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1(k) \\ \boldsymbol{Q}_2(k)\,\mathrm{e}^{A_1\Delta t_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Q}_r\mathrm{e}^{A_1\Delta t_1}\cdots\mathrm{e}^{A_{r-1}\Delta t_{r-1}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

那么,系统对应第$j$段时间的可观测矩阵可以定义为[14-15]

$$\boldsymbol{Q}_j(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_j(k) \\ \boldsymbol{H}_j(k)\,A_j(k) \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_j(k+s-1)\,\boldsymbol{A}_j(k+s-2)\cdots\boldsymbol{A}_j(k) \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中:$s$为在该段时间内观测量的个数。

基于上述PWCS得到的可观测矩阵,针对测角测速组合导航系统,下面具体分析不同的导航系统可观测性指标。

### 2.1 系统可观测矩阵条件数

对于深空探测自主导航系统,在不同时间段内

系统可观测度是变化的，利用基于可观测矩阵条件数的可观测度分析方法，可以给出整个导航过程中整体可观测水平及其变化情况。

上述PWCS模型可以写为如下线性时变离散方程形式：

$$z=[\ Z(k)\quad \cdots\quad Z(k+s-1)\ ]=\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{X}(k) \tag{10}$$

显然，式(10)是一个具有一般形式的线性方程。

根据矩阵扰动分析可知，当一般线性方程 $\boldsymbol{QX}=z$ 存在扰动时，有

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{X}\|}{\|\boldsymbol{X}\|}\leqslant\frac{\mathrm{cond}(\boldsymbol{Q})}{1-\mathrm{cond}(\boldsymbol{Q})\dfrac{\|\delta \boldsymbol{Q}\|}{\|\boldsymbol{Q}\|}}\cdot\left(\frac{\|\delta \boldsymbol{Q}\|}{\|\boldsymbol{Q}\|}+\frac{\|\delta z\|}{\|z\|}\right) \tag{11}$$

式中：$\delta\boldsymbol{Q}$、$\delta z$ 为方程左右两边的扰动；$\delta\boldsymbol{X}$ 为由此引起的解 $X$ 的扰动。

式(11)表明，系统扰动引起解的相对误差上界是由矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的条件数决定的，所以矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的条件数反映了系统的解随扰动变化的敏感程度。

对于深空探测自主导航系统，可以利用PWCS线性化并得到系统条带化可观测矩阵，然后由矩阵的条件数表征导航系统的整体可观测度，即

$$\gamma=\frac{1}{\mathrm{cond}(\boldsymbol{Q})}=\frac{1}{\|\boldsymbol{Q}\|\cdot\|\boldsymbol{Q}^{-1}\|}=\frac{\min\sigma_{\boldsymbol{Q}}}{\max\sigma_{\boldsymbol{Q}}} \tag{12}$$

式中：$\sigma_{\boldsymbol{Q}}$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的奇异值。分析可知 $\gamma\in[0,1]$，当 $\gamma=0$ 时，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})<n$，系统不可观测；$\gamma$ 越大，系统状态估计精度越高。

基于可观测矩阵条件数的导航系统可观测性分析方法由于不依赖实际的观测数据，只与导航系统的状态矩阵和观测矩阵有关，所以可以作为优选导航系统模型的指标。

### 2.2　系统可观测阶数

由可观测矩阵求解式可知，导航系统状态的可观测度与导航系统的观测次数有很大关系。导航系统的观测次数即是被观测的状态变量在导航递推过程中被积分的次数[16]，因此，可定义导航系统状态变量的可观测阶数如下：若 $x_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 为 $X$ 中状态分量，使 $\boldsymbol{Q}(k)$ 中对应的 $x_i$ 可观的最小观测次数称为 $x_i$ 的可观测阶数。

若导航系统整体不可观测，那么此时对于导航系统的各个状态分量的可观测度也没有了实际价值。因此，本文引出导航系统可观测阶数的概念：使导航系统能够完全可观测的最小观测次数，即使导航系统可观测矩阵 $\boldsymbol{Q}(k)$ 满足可观测条件的最小观测次数。

由定义可知，导航系统的可观测阶数反映了导航系统状态与导航系统观测量之间的积分关系，它会影响导航系统状态估计结果的收敛速度和导航系统的抗干扰能力。

### 2.3　系统状态变量可观测度

下面对基于奇异值分解的系统状态变量可观测度进行分析研究。

由矩阵奇异值分解定理，对方程中的可观测矩阵 $\boldsymbol{Q}$，有

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{USV}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 为正交矩阵；$\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}\left(\left[\sigma_1\quad\sigma_2\quad\cdots\quad\sigma_r\quad 0_{(n-r)\times 1}\right]\right)$ 为 $\boldsymbol{Q}$ 的奇异值排列对角矩阵；$r$ 即为系统可观测矩阵的秩。

假设系统完全能观，对上述线性时变离散方程取差分并整理，得

$$\delta x_i(k)=\boldsymbol{VS}^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\cdot\delta z=\begin{bmatrix}\dfrac{v_{i1}}{\sigma_1}&\cdots&\dfrac{v_{in}}{\sigma_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\cdot\delta z \tag{14}$$

由于 $\boldsymbol{U}$ 为正交矩阵，对式(14)两边取2范数，根据范数包容性原理和酉不变性，整理可得

$$\begin{aligned}\|\delta x_i(k)\|&=\left\|\begin{bmatrix}\dfrac{v_{i1}}{\sigma_1}&\cdots&\dfrac{v_{in}}{\sigma_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\cdot\delta z\right\|\leqslant\\&\left\|\begin{bmatrix}\dfrac{v_{i1}}{\sigma_1}&\cdots&\dfrac{v_{in}}{\sigma_n}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\right\|\cdot\|\delta z\|=\\&\left\|\begin{bmatrix}\dfrac{v_{i1}}{\sigma_1}&\cdots&\dfrac{v_{in}}{\sigma_n}\end{bmatrix}\right\|\cdot\|\delta z\|=\frac{1}{\lambda}\|\delta z\|\end{aligned} \tag{15}$$

即

$$\frac{\|\delta x_i(k)\|}{\|\delta z\|}\leqslant\frac{1}{\lambda_i} \tag{16}$$

式中：$\dfrac{1}{\lambda_i}$ 为系统状态变量受到观测变量影响的误差上限，可以表征系统状态分量的随观测扰动变化情况。因此，定义系统状态变量 $x_i(k)$ 的可观测度：

$$\lambda_i=\left\|\begin{bmatrix}\dfrac{v_{i1}}{\sigma_1}&\cdots&\dfrac{v_{in}}{\sigma_n}\end{bmatrix}\right\|^{-1} \tag{17}$$

显然，$\lambda_i$ 越大，系统状态变量误差上界越小，可观测度就越高。

导航系统状态变量是多样的，不同的物理量的量纲不一致。不同物理量的量纲归一化，等效于物

理量的坐标作拉伸[2]。由于不同物理量的可观测度比较会有错误结论,所以$\lambda_i$适用于同量纲的物理量之间比较。

## 3 仿真分析

探测器星历数据由 JPL 的 de421 提供,导航系统状态模型考虑太阳、地球、小行星引力摄动以及太阳光压摄动影响,对不同量测模型的可观测性进行分析。

探测器在 J2000 日心黄道惯性坐标系下的初始状态参数为

$$r_0=[\,1.705\,5\times10^8\quad 2.497\,7\times10^6\quad 3.988\,4\times10^6\,]^{\mathrm{T}}\ (\mathrm{km})$$
$$v_0=[5.101\,8\quad 26.902\,5\quad 12.032\,3]^{\mathrm{T}}\ (\mathrm{km/s}) \tag{18}$$

初始位置误差为 $1\times10^3$ km,初始速度误差 100 m/s。最后,基于 EKF 的导航算法,选取小行星探测任务巡航段做仿真分析。仿真开始时间为 2020-09-22 21:46:07 UTC,结束时间为 2020-10-22 22:46:07 UTC,仿真步长为 600 s。为方便比较,将同量纲的状态可观测度作归一化处理。

### 3.1 量测模型 1:太阳视线矢量

基于"太阳视线矢量"为量测的导航模型,对其进行可观测性分析,结果见表 1。

量测模型 1 的系统是可观测的,但是可观测度较低。系统可观测阶数为 3,系统位置状态分量可观测顺序为 $y\rightarrow z\rightarrow x$,速度分量可观测顺序为 $v_y\rightarrow v_z\rightarrow v_x$。

**表 1 量测模型 1 的可观测分析结果**

**Tab.1 Results of the observability analysis of measurement model 1**

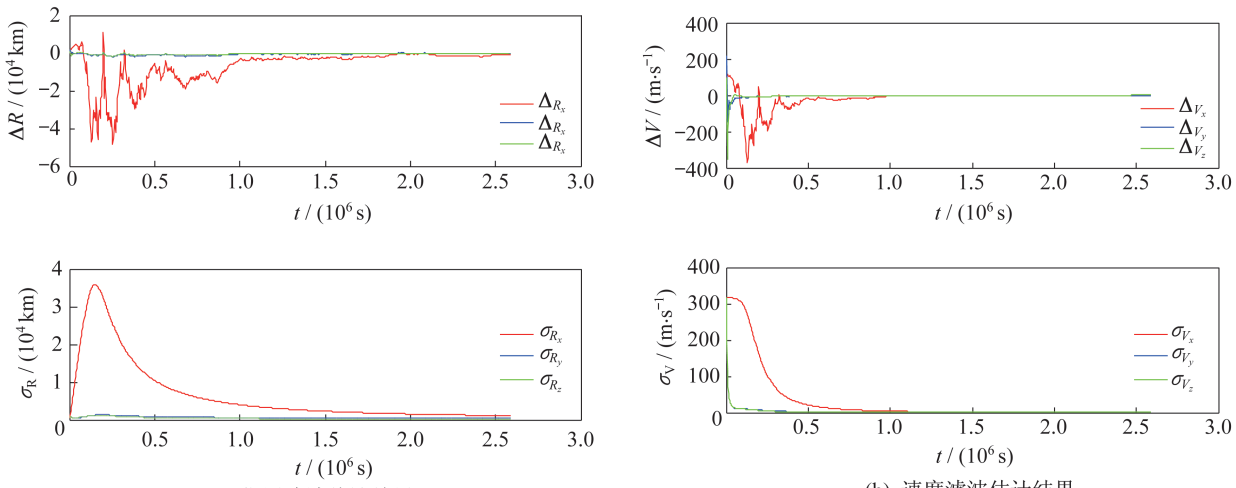
| 量测模型 | 太阳视线矢量 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 系统可观测阶数 | 3 | | 系统可观测度 | | $1.129\,4\times10^{-13}$ | |
| 状态分量 | $x$ | $y$ | $z$ | $v_x$ | $v_y$ | $v_z$ |
| 可观测度 | 0.014 6 | 1.000 0 | 0.624 1 | 0.014 4 | 1.000 0 | 0.618 6 |

基于 EKF 导航算法,得到量测模型 1 的导航估计结果,见表 2。天文自主导航位置和速度 3 个方向上的估计结果如图 3 所示。由导航结果可知:系统大约在 $2\times10^6$ s 时完全收敛,收敛速度较慢;位置和速度收敛误差较大,分量收敛速度与对应的可观测度基本一致,但是与估计精度不相关。

**表 2 量测模型 1 的导航估计结果**

**Tab.2 Results of the navigation estimation of measurement model 1**

| 导航结果 | $x$/km | $y$/km | $z$/km | $v_x$/(m·s$^{-1}$) | $v_y$/(m·s$^{-1}$) | $v_z$/(m·s$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 状态误差 | −885.998 6 | −166.211 3 | −26.490 9 | −0.911 5 | −0.138 6 | 0.038 8 |
| 误差大小 | 901.843 4 | | | 0.922 8 | | |




(a) 位置滤波估计结果 (b) 速度滤波估计结果

**图 3 量测模型 1 的基于 EKF 天文自主导航**

**Fig.3 Autonomous celestial navigation of measurement model 1 based on EKF**

### 3.2　量测模型 2：太阳视线矢量&相对太阳视向速度

基于“太阳视线矢量&相对太阳视向速度”为量测的导航模型，对其进行可观测性分析，结果见表3。

表 3　量测模型 2 的可观测分析结果

Tab.3　Results of the observability analysis of measurement model 1

| 量测模型 | 太阳视线矢量&相对太阳视向速度 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 系统可观测阶数 | 1 | | 系统可观测度 | | $1.109\,8\times10^{-12}$ | |
| 状态分量 | $x$ | $y$ | $z$ | $v_x$ | $v_y$ | $v_z$ |
| 可观测度 | 0.014 7 | 1.000 0 | 0.628 8 | 1.000 0 | 0.027 5 | 0.027 5 |

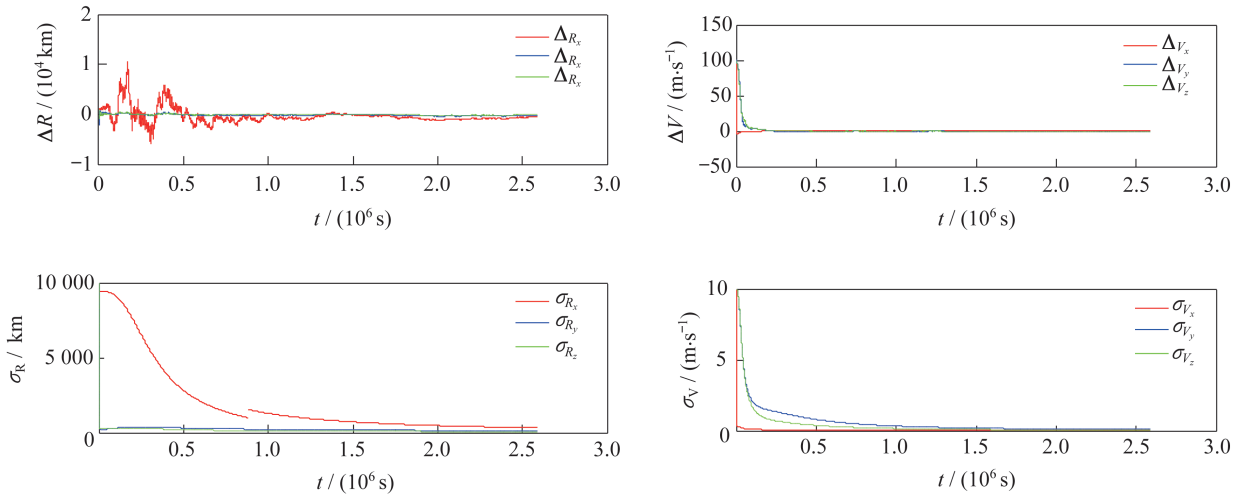
量测模型 2 的系统是可观测的，可观测度高于基于太阳视线矢量；系统可观测阶数为 1，系统位置状态分量可观测顺序为 $y\rightarrow z\rightarrow x$，速度分量可观测顺序为 $v_x\rightarrow v_y/v_z$。因为量测模型 2 比量测模型 1 多了相对太阳速度的观测量，所以增强了可观测度，减少了可观测阶数。

基于 EKF 导航算法，得到量测模型 2 的导航估计结果，见表4。天文自主导航位置和速度 3 个方向上的估计结果如图 4 所示。由导航结果可知：系统大约在 $1.5\times10^6$ s 时收敛，收敛速度比量测模型 1 好；位置和速度收敛误差也优于量测模型 1。各分量收敛速度与对应的可观测度基本一致，但是估计精度与之并不相关。

表 4　量测模型 2 的导航估计结果

Tab.4　Results of the navigation estimation of measurement model 2

| 导航结果 | $x$/km | $y$/km | $z$/km | $v_x$/(m·s$^{-1}$) | $v_y$/(m·s$^{-1}$) | $v_z$/(m·s$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 状态误差 | −475.195 2 | −115.838 7 | −96.894 4 | 0.161 7 | −0.031 6 | 0.075 5 |
| 误差大小 | 498.615 6 | | | 0.181 3 | | |




(a) 位置滤波估计结果　　(b) 速度滤波估计结果

图 4　量测模型 2 的基于 EKF 天文自主导航

Fig.4　Autonomous celestial navigation of measurement model 2 based on EKF

### 3.3　量测模型 3：太阳视线矢量&相对 1 颗恒星视向速度

基于“太阳视线矢量&相对 1 颗恒星视向速度”为量测的导航模型，对其进行可观测性分析，结果见表5。

量测模型 3 的系统是可观测的，可观测度介于

表 5　量测模型 3 的可观测分析结果

Tab.5　Results of the observability analysis of measurement model 3

| 量测模型 | 太阳视线矢量&相对 1 颗恒星视向速度 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 系统可观测阶数 | 1 | | 系统可观测度 | | $2.707\,3\times10^{-12}$ | |
| 状态分量 | $x$ | $y$ | $z$ | $v_x$ | $v_y$ | $v_z$ |
| 可观测度 | 1.000 0 | 0.964 8 | 0.984 3 | 0.382 8 | 1.000 0 | 0.962 5 |

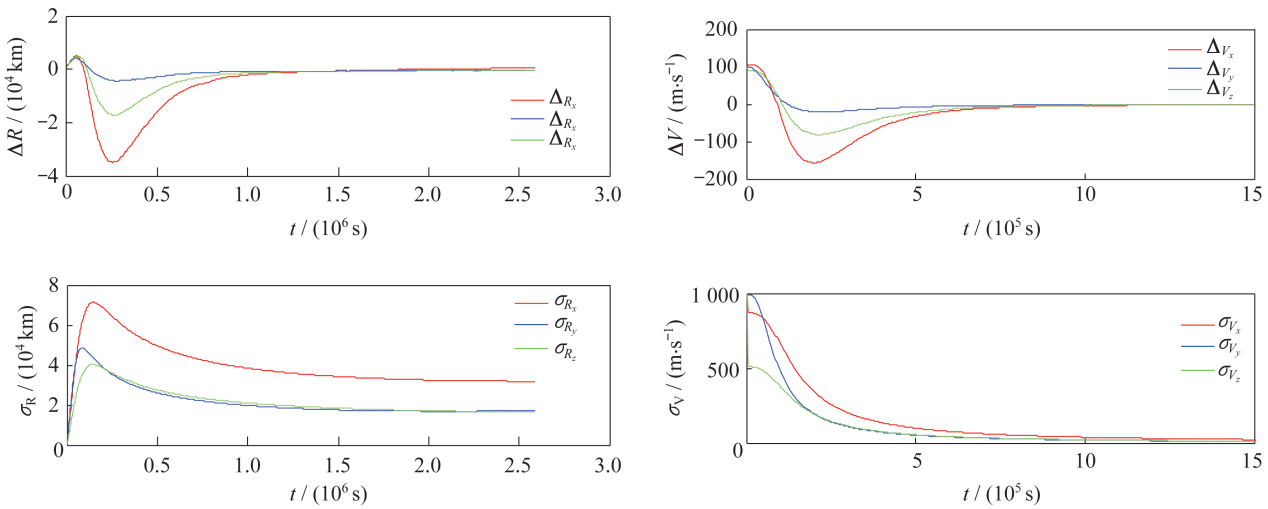
量测模型1和量测模型2之间;系统可观测阶数为1,系统位置状态分量可观测顺序为$x \to z \to y$,速度分量可观测顺序为$v_y \to v_z \to v_x$。因为量测模型3加入了相对恒星速度的观测量,所以可观测度比量测模型1高,但是比量测模型2低,相对太阳速度观测的系统性能优于对此恒星观测的系统。

基于EKF导航算法,得到量测模型1的导航估计结果,见表6。天文自主导航位置和速度3个方向上的估计结果如图5所示。由导航结果可知:系统大约在$1.5 \times 10^6$ s时收敛,收敛速度与量测模型2相当;位置和速度收敛介于量测模型1与量测模型2之间;位置分量收敛速度基本相同,速度分量收敛速度与相对可观测度分析一致;各分量估计精度均与可观测度无明显对应关系。

**表6 量测模型3的导航估计结果**

**Tab.6 Results of the navigation estimation of measurement model 3**

| 导航结果 | $x$/km | $y$/km | $z$/km | $v_x$/(m·s$^{-1}$) | $v_y$/(m·s$^{-1}$) | $v_z$/(m·s$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 状态误差 | 481.039 3 | −321.082 8 | −521.501 2 | −0.437 2 | −0.470 7 | −0.291 6 |
| 误差大小 | 778.753 2 | | | 0.705 5 | | |




(a) 位置滤波估计结果 (b) 速度滤波估计结果

**图5 量测模型3的基于EKF天文自主导航**

**Fig.5 Autonomous celestial navigation of measurement model 3 based on EKF**

### 3.4 量测模型4:太阳视线矢量&相对3颗恒星视向速度

基于"太阳视线矢量&相对3颗恒星视向速度"的导航模型,对其进行可观测性分析,结果见表7。

量测模型4的系统是可观测的,可观测度很高;系统可观测阶数为1,系统位置状态分量可观测顺序为$y \to z \to x$,速度分量可观测顺序为$v_x \to v_z \to v_y$。

**表7 量测模型4的可观测分析结果**

**Tab.7 Results of the observability analysis of measurement model 4**

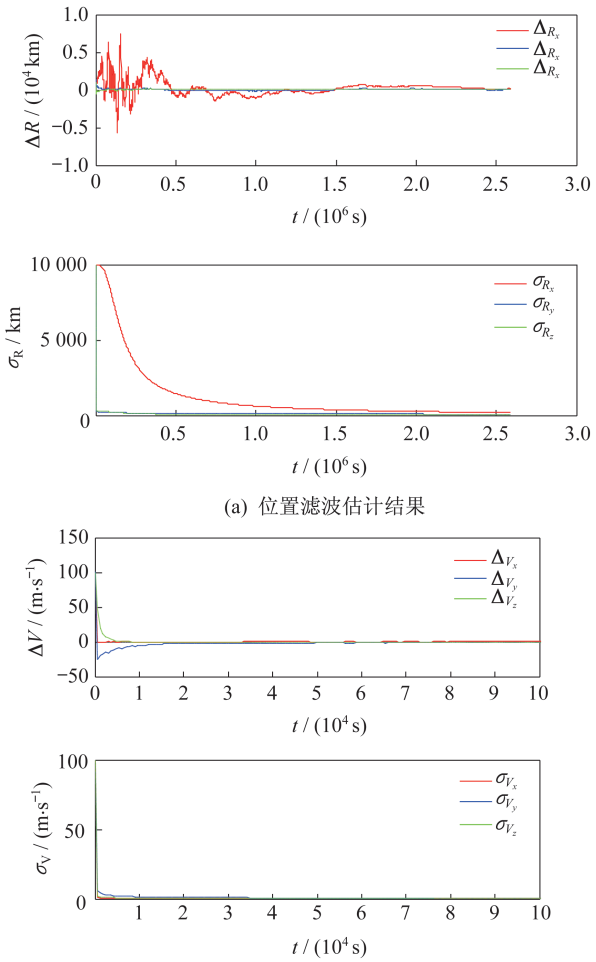
| 量测模型 | 太阳视线矢量&相对3颗恒星视向速度 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 系统可观测阶数 | 1 | | 系统可观测度 | | 6.335 1×10$^{-7}$ | |
| 状态分量 | $x$ | $y$ | $z$ | $v_x$ | $v_y$ | $v_z$ |
| 可观测度 | 0.430 5 | 1.000 0 | 0.664 7 | 1.000 0 | 0.241 2 | 0.579 6 |

基于EKF导航算法,得到量测模型1的导航估计结果,见表8。天文自主导航位置和速度三个方向上的估计结果如图6所示。由导航结果可知:系统大约在$1 \times 10^6$ s时收敛,收敛速度优于其他量测模型;状态分量收敛速度与相对可观测度分析结果对应,但估计精度也无明显对应关系。量测模型4结果均优于其他量测模型,因为它的量测信息是覆盖并且多于其他量测模型的。显然,加入新的观测量可以增强导航系统性能。

**表 8　量测模型 4 的导航估计结果**

**Tab.8　Results of the navigation estimation of measurement model 4**

| 导航结果 | $x$/km | $y$/km | $z$/km | $v_x$/(m·s$^{-1}$) | $v_y$/(m·s$^{-1}$) | $v_z$/(m·s$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 状态误差 | 167.721 6 | 33.503 4 | 48.191 2 | 0.031 4 | 0.039 0 | 0.086 6 |
| 误差大小 | 177.694 6 | | | 0.100 1 | | |




(a) 位置滤波估计结果

(b) 速度滤波估计结果

**图 6　量测模型 4 的基于 EKF 天文自主导航**

**Fig.6　Autonomous celestial navigation of measurement model 4 based on EKF**

## 4　结束语

本文基于 PWCS 方法得到导航系统的可观测矩阵，进而以可观测矩阵的条件数倒数作为导航系统的可观测度指标，结合 SVD 方法得到导航系统各个状态分量的可观测度；同时引入导航系统可观测阶数，综合分析导航系统的可观测性能及其对导航系统刻画效果。

以小行星探测工程任务巡航段为背景，本文系统地给出了不同量测模型的导航系统可观测性仿真分析。由分析结果可知：系统的可观测度和可观测阶数影响导航的收敛速度和估计精度；状态分量的可观测度可以作为各状态分析收敛速度比较的参考，但对估计精度影响不大。在相同观测条件下，可观测度越高，可观测阶数越少，导航结果收敛越快，精度越高。本文所提出的可观测性分析方法，对导航系统可观测性分析具有很好的参考性，可为组合导航系统量测模型的优选提供参考，具有良好的理论和应用价值。

**参考文献**

[1] 黄翔宇，崔平远，崔祜涛．深空自主导航系统的可观性分析[J]．宇航学报，2006，27(3)：332-337.

[2] 马艳红，胡军．基于 SVD 理论的可观测度分析方法的几个反例[J]．中国惯性技术学报，2008，16(4)：448-452.

[3] LEE E B, MARKUS L. Foundations of optimal control theory [M]. New York: Wiley, 1967: 27-39.

[4] 张伟．深空探测天文测角测速组合自主导航方法[J]．飞控与探测，2018，1(1)：55-61.

[5] 范炜，李勇．基于奇异值分解的航天器自主导航系统能观度分析[J]．航天控制，2009，27(2)：50-55.

[6] YIM J R, CRASSIDIS J L, JUNKINS J L. Autonomous orbit navigation of interplanetary spacecraft [C]// AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Reston, VA: AIAA Paper, 2000: 53-61.

[7] 刘禹，陈浩，张丽敏．构造折射星场方法用于星光折射导航仿真的研究[J]．上海航天，2018，35(1)：43-47.

[8] RAYMAN M D. The successful conclusion of the deep space 1 mission: important results without a flashy title [C]// IAF Abstracts, Cospar Scientific Assembly, 34th COSPAR Scientific Assembly. 2002: 185-196.

[9] BROPHY J . The dawn ion propulsion system [J]. Space Science Reviews, 2011, 163 (1/2/3/4) : 251-261.

[10] DI CARA D M, ESTUBLIER D. Smart-1: an analysis of flight data [J]. Acta Astronautica, 2005, 57 (2): 250-256.

[11] 张伟，陈晓，尤伟，等．光谱红移自主导航新方法[J]．上海航天，2013，30(2)：32-33.

[12] 张伟，黄庆龙，陈晓．基于天文测角测速组合的小行星探测器自主导航方法[J]．中国科学：物理学力学天文学，2019，49(8)：92-101.

（下转第 31 页）