

文章编号: 1674-8190(2022)03-108-12

基于四面体单元的三维裂纹自动化建模

高文, 王生楠

(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

摘要: 三维裂纹前缘布置结构化网格是一项耗时且困难的工作。以二次四面体单元虚拟裂纹闭合法(VCCM)为基础, 提出基于几何特征的三维裂纹建模方法, 阐述应用四面体单元在ABAQUS上进行三维裂纹建模的实现细节; 应用Python编程语言结合NumPy和SciPy开源科学计算库开发参数化三维裂纹分析程序包, 实现三维裂纹问题分析的全流程自动化; 数值算例和文献中的结果吻合很好, 表明本文建模方法是准确且可靠的, 全模型采用常规四面体单元, 提高了三维裂纹自动化建模的稳定性和鲁棒性。

关键词: 虚拟裂纹闭合法; 三维裂纹; 四面体单元; 自动化建模; 有限元方法; 应力强度因子; 应变能释放率

中图分类号: V215.6; O346.1

文献标识码: A

DOI: 10.16615/j.cnki.1674-8190.2022.03.12

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Fully Automated Three-dimensional Crack Modelling Using Tetrahedral Finite Element

GAO Wen, WANG Shengnan

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Producing structured mesh at the immediate vicinity of the crack front for three-dimensional (3D) crack modelling is a very time consuming and difficult task. A geometry feature based method for 3D crack modelling based on virtual crack closure-integral method (VCCM) for the tetrahedral finite element is proposed, and the implementation details of employing tetrahedral finite elements for 3D crack modelling on the basis of ABAQUS are described. On this basis, a 3D crack analysis package is developed by applying the Python programming language combined with NumPy and SciPy to automate the whole process of crack problem analysis. The stability and robustness of the 3D crack automated modelling is improved by employing tetrahedral finite element. The numerical examples are in good agreement with the results in the literature, proving the accuracy and reliability of the modelling method.

Key words: VCCM; three-dimensional crack; tetrahedral finite element; fully automated modelling; finite element method; stress intensity factors; strain energy release rate

收稿日期: 2021-07-17; 修回日期: 2021-10-12

通信作者: 王生楠, wangshna@nwpu.edu.cn

引用格式: 高文, 王生楠. 基于四面体单元的三维裂纹自动化建模[J]. 航空工程进展, 2022, 13(3): 108-119.

GAO Wen, WANG Shengnan. Fully automated three-dimensional crack modelling using tetrahedral finite element[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2022, 13(3): 108-119. (in Chinese)

0 引言

工程结构由于材料夹杂或服役等原因不可避免地存在缺陷或裂纹,这些缺陷或裂纹在疲劳载荷的作用下逐渐扩展最终导致结构发生断裂。据统计,大约60%的结构失效是由疲劳裂纹扩展引起的,因此,需要对含裂纹结构的安全性进行量化分析。在线性弹性断裂力学(Linear Elastic Fracture Mechanics,简称LEFM)范围内,应力强度因子(Stress Intensity Factors,简称SIFs)用来表征裂纹尖端附近应力场强度,是研究裂纹起裂和扩展的关键因素。但只有少数形式简单的裂纹可以通过试验或解析的方式获得应力强度因子解,对于形式复杂的裂纹问题,不可避免地要使用有限差分法、有限元法、边界元法等数值方法来求解。在这些方法中,有限元法由于其较高的求解效率和可以模拟任意复杂几何形状而在工程界占据主导地位。

由线弹性断裂力学可知,裂纹尖端附近应力场存在 $1/\sqrt{r}$ 奇异性。要正确模拟奇异应力,需要在裂尖附近布置非常细密的网格。R. S. Barsoum^[1]和R. D. Henshell等^[2]研究发现,将二次单元的中节点移动到靠近裂尖四分之一处可以正确地模拟裂纹尖端奇异应力。对于三维裂纹的有限元建模,当前使用最广泛的裂尖单元是塌陷四分之一节点六面体单元(Collapsed Quarter-point 20-node Hexahedral Finite Element),主要原因有两个:一是该单元准确地再现了裂纹尖端附近的奇异应力场;二是许多断裂参数计算方法是基于六面体单元发展起来的,可以方便地用于应力强度因子 K 、 J 积分(J -integral)、应变能释放率 G (Strain Energy Release Rate,简称SERR)等断裂参数的计算,比如位移法(Displacement Extrapolation Method,简称DEM)、四分之一节点单元应力法(Quarter Point Element Stress Method,简称QPESM)、交互积分法(Interaction Integral Method,简称IIM)、虚拟裂纹扩展法(Virtual Crack Extension Method,简称VCEM)、虚拟裂纹闭合法(Virtual Crack Closure-Integral Method,简称VCCIM或VCCM)等。由此形成了当前三维裂纹有限元建

模的主要方法:在裂纹前缘使用六面体单元/应力奇异单元,模型其余部分采用四面体单元^[3-5]或六面体单元^[6]进行网格划分,比如三维裂纹分析软件FRANC3D^[3],CRACKTRACER3D^[4-5],ZENCRACK^[6];或者以裂尖子模型的形式来求解裂纹断裂参数,全局模型由网格较粗的四面体单元构成,子模型为一个由六面体单元/应力奇异单元构成的网格精细的只包含裂纹前缘附近区域的管状网格,比如三维裂纹扩展分析软件ADAPCRACK-3D^[7]和PROCRAK^[8]。然而,对于复杂几何结构件中的任意三维裂纹,在裂纹前缘周围生成结构化网格是非常麻烦和困难的,比如FRANC3D、ZENCRACK和CRACKTRACER3D软件在实际使用过程中均出现过网格生成失败的案例^[5,9]。这些限制促使研究人员寻找新的方法或技术来研究三维裂纹问题,其中一种方法是采用四面体单元进行裂纹建模,并基于四面体单元来计算裂纹断裂参数^[10-15]。尤其是H. Okada等^[11-12]和S. Tanaka等^[13]的研究,他们提出了二次四面体单元的VC-CM法,在此基础上提出了基于点集结合Delaunay网格剖分算法的三维裂纹自动化建模方法,并开发了三维裂纹扩展分析软件用于多种裂纹问题的研究。相较于采用四面体/六面体混合单元建模,全模型采用四面体单元进行裂纹分析显著简化了建模流程,疲劳裂纹扩展数值模拟需要更新模型网格,而四面体单元可以方便地自动化生成,对于数值模拟过程的全自动化实现有着天然的优势。国内对于三维裂纹有限元建模及扩展模拟也开展了一些研究,唐俊星等^[16]采用参数化实体建模的方法,在ANSYS软件上应用APDL语言(ANSYS Parametric Design Language)实现了平面三维裂纹的自动化建模和疲劳裂纹扩展模拟;李宇飞等^[17]将该方法扩展至三维非平面裂纹的研究;齐桂营^[18]采用参数化建模的方法对复合型三维裂纹的扩展进行了研究;黄如旭等^[19]对三点弯曲(Three Point Bending,简称TPB)试样I型三维裂纹和紧凑拉伸剪切(Compact Tension Shear,简称CTS)试样的面内复合型三维裂纹扩展进行了数值研究。此外,张智轩等^[20]应用FRANC3D软件分析了含销钉孔边裂纹轮盘的裂纹扩展;刘鹤等^[21]应

用FRANC3D软件对航空发动机涡轮叶片不同位置的三维裂纹扩展进行了研究。上述国内的三维裂纹研究均基于混合单元建模,应用四面体单元进行三维裂纹分析尚未见到相关报导。

本文以二次四面体单元VCCM法为基础,对应用四面体单元进行三维裂纹有限元建模方法进行研究,对VCCM法计算断裂参数的影响因素进行分析,裂纹建模过程需要繁琐的手工操作,全自动化建模也是本文的研究重点。

1 虚拟裂纹闭合法

1.1 二次四面体单元的VCCM法计算式

由VCCM法的理论可知,在裂纹的虚拟扩展面上需要有单元面片存在以获得计算G所需的节点力,且裂纹前缘两侧的面片宽度需相等。四面体单元的面是三角形,典型的裂纹前缘二次四面体单元分布示意图如图1所示。裂纹前缘的三角形单元面片分为两种:一种是三角面片的一条边位于裂纹前缘,记为 S_1 ;另一种是三角面片的一个顶点位于裂纹前缘,记为 S_2 , Δ 为单元宽度,如图2所示。面片 S_1 和 S_2 上G的计算式如式(1)~式(2)所示^[11]。

$$\begin{cases} G_I(S_1) \approx \frac{1}{3A_1} \sum_{i=1}^5 \bar{v}_i^I(S_1) \bar{P}_i^I(S_1) \\ G_{II}(S_1) \approx \frac{1}{3A_1} \frac{\bar{v}_1(S_1)}{|\bar{v}_1(S_1)|} \sum_{i=1}^5 \bar{v}_i^I(S_1) \bar{P}_i^I(S_1) \\ G_{III}(S_1) \approx \frac{1}{3A_1} \frac{\bar{v}_3(S_1)}{|\bar{v}_3(S_1)|} \sum_{i=1}^5 \bar{v}_i^I(S_1) \bar{P}_i^I(S_1) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} G_I(S_2) \approx \frac{1}{A_2} \sum_{i=1}^3 \bar{v}_i^I(S_2) \bar{P}_i^I(S_2) \\ G_{II}(S_2) \approx \frac{1}{A_2} \frac{\bar{v}_1(S_2)}{|\bar{v}_1(S_2)|} \sum_{i=1}^3 \bar{v}_i^I(S_2) \bar{P}_i^I(S_2) \\ G_{III}(S_2) \approx \frac{1}{A_2} \frac{\bar{v}_3(S_2)}{|\bar{v}_3(S_2)|} \sum_{i=1}^3 \bar{v}_i^I(S_2) \bar{P}_i^I(S_2) \end{cases} \quad (2)$$

式中: A_1 、 A_2 为面片 S_1 、 S_2 的面积; $\bar{v}_i^I(S_1)$ 和 $\bar{P}_i^I(S_1)$ ($i=1,2,3$)为面片 S_1' 和 S_1 上节点 I ($I=1,2,3,4,5$)的张开位移和节点力在裂尖局部笛卡尔坐标系下的分量; $\bar{v}_i^I(S_2')$ 和 $\bar{P}_i^I(S_2)$ ($i=1,2,3$)为面片 S_2' 和 S_2 上节点 I ($I=1,2,3$)的张开位移和节点力在裂尖局部笛卡尔坐标系下的分量。

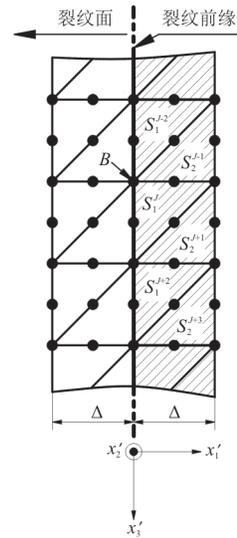


图1 典型裂纹前缘单元分布示意图
Fig. 1 Element face arrangements across the crack front

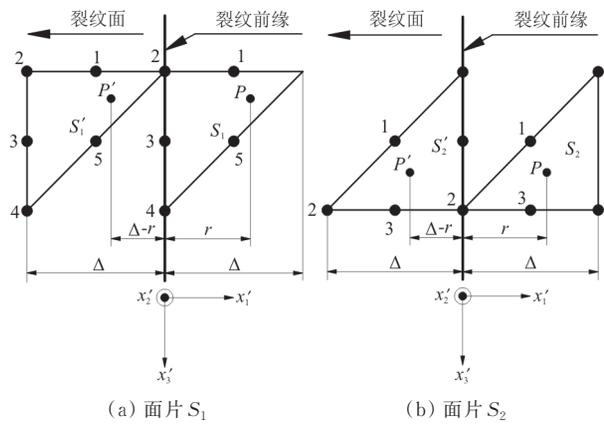


图2 裂纹前缘两种单元面片示意图
Fig. 2 Two kinds of arrangements of pairing finite element faces

线弹性断裂力学范围内, K 和 G 的关系如式(3)所示。

$$\begin{cases} G_I = \frac{K_I^2}{E'} \\ G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \\ G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \end{cases} \quad (3)$$

式中:平面应变情况下, $E' = E/(1 - \nu^2)$;平面应力情况下, $E' = E$ 。 E 和 ν 为材料的杨氏弹性模量和泊松比; μ 为剪切模量。

由此可得单元面片 S_i ($i=1,2$)对应的SIFs计算式:

$$\begin{cases} K_I(S_i) = \sqrt{E'G_I(S_i)} \\ K_{II}(S_i) = \frac{G_{II}(S_i)}{|G_{II}(S_i)|} \sqrt{E'|G_{II}(S_i)|} \\ K_{III}(S_i) = \frac{G_{III}(S_i)}{|G_{III}(S_i)|} \sqrt{E'|G_{III}(S_i)|} \end{cases} \quad (4)$$

应变能释放率 G 总是假设为正,注意到式(1)、式(2)和式(4)中 G_{II} 和 G_{III} 可能为负,此处的正负号表示裂尖局部坐标系下裂纹的变形方向。

1.2 节点力和裂纹张开位移的计算

节点位移和节点力是有限元计算的基本输出量,但有限元计算得到的单元节点力不能直接用于二次四面体单元 VCCM 法的断裂参数计算,需要做进一步处理。节点力的计算可分三步:①找到包含该节点的位于三角面片上方的所有四面体单元;②将第①步中的每个单元在该节点上产生的节点力求和,得到全局坐标系下的节点上的节点力合力;③将该节点上的节点力合力转换成裂尖局部笛卡尔坐标系下的节点力分量,并用合适的系数进行分配以用于不同单元面片上 G 的计算。如图 1 所示,节点 B 为单元面片 S_1^{i-2} 、 S_2^{i-1} 和 S_1^i 的公共节点, $C_B(S_1^i)$ 为面片 S_1^i 对节点 B 节点力的贡献比例,如式(5)所示。

$$C_B(S_1^i) = \frac{w(S_1^i)}{w(S_1^{i-2}) + w(S_2^{i-1}) + w(S_1^i)} \quad (5)$$

式中: $w(S_1^{i-2})$ 、 $w(S_2^{i-1})$ 、 $w(S_1^i)$ 为单元面片 S_1^{i-2} 、 S_2^{i-1} 、 S_1^i 上节点 B 的节点力分配系数,式(5)以单元面片的面积作为分配系数的值。

由图 2 可知,节点 B 对应面片 S_1^i 上的 2 节点,因此,用于计算面片 S_1^i 上 G 的节点力 $\bar{P}_i^2(S_1^i)$ 可由式(6)计算, $P_i(B)$ 为节点 B 的节点力在单元面片 S_1^i 上局部笛卡尔坐标系下的分量。

$$\bar{P}_i^2(S_1^i) = C_B(S_1^i) P_i(B) \quad (6)$$

裂纹张开位移的计算较简单,裂纹面上表面的节点位移减去下表面对应节点的位移,可得全局坐标系下的裂纹张开位移,再将其转换成裂尖局部坐标系下的位移分量,即可得 I、II 和 III 型对应的裂纹张开位移。

2 三维裂纹自动化建模

应用 ABAQUS 软件分析裂纹问题的步骤包括:裂纹几何特征创建,材料属性赋值,分析步创

建,裂纹属性赋值,创建边界条件和载荷施加,网格划分,定义输出,提交计算,断裂参数计算及结果保存等,这个过程需要非常繁琐的手工操作。ABAQUS 软件提供了丰富的二次开发接口,所有在 ABAQUS/CAE 中实现的前处理和后处理均可通过 Python 程序实现自动化操作。本文以二次四面体单元 VCCM 法为基础,应用 Python 编程语言,结合开源科学计算库 NumPy^[22] 和 SciPy^[23],采用面向对象的程序设计技术,开发了三维裂纹分析程序包。该程序包由一系列函数、类和模块组成,其工作流程和在 ABAQUS/CAE 中分析裂纹问题的 workflows 一致。上述裂纹分析步骤通过调用相应的函数或实例化相应的类来完成,各建模步骤需要的参数通过不同的接口文件给定。

2.1 裂纹几何特征创建

FRANC3D^[3] 软件通过其特有的“裂纹模板”功能来完成裂纹前缘单元布置和裂纹快速插入。ZENCRACK 软件^[6] 通过“Crack-Block”技术引入不同形式的裂纹。J. C. Sobotka 等^[24] 提出在 ABAQUS 软件上通过 Python 语言二次开发生成椭圆裂纹前缘网格和裂纹快速插入的方法。上述技术和方法的目的有两个:一是在裂纹前缘生成高质量单元以提高断裂参数计算精度;二是在待分析结构上快速引入裂纹。本文通过显式创建裂纹前缘单元面片、布种控制单元分布来完成基于二次四面体单元 VCCM 法的三维裂纹建模,以此为基础开发参数化裂纹模板库,用于不同形式、不同尺寸的裂纹几何特征的快速引入。

待分析结构中引入裂纹几何特征可分为三步:①读取裂纹定义文件里的裂纹形式、尺寸、裂纹前缘单元数量、单元宽度、裂纹插入位置和方位等参数;②根据第①步中的裂纹参数创建裂纹几何部件;③根据第①步中的裂纹位置参数通过平移、旋转等操作,将裂纹部件移动至指定位置和待分析结构进行切割、合并等几何布尔运算,完成裂纹几何特征的引入。椭圆裂纹是一种非常重要的裂纹形式,在飞机结构的损伤容限评定中,对于结构内部、表面、孔边等部位的初始损伤通常用椭圆/圆形裂纹、二分之一椭圆/圆形裂纹、四分之一椭圆/圆形角裂纹来表示。本文以椭圆裂纹为例来说明参数化裂纹模板的实现过程。

设 $Oxyz$ 为全局坐标系,坐标系原点坐标为

$(0, 0, 0)$, 基底向量为 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, 裂纹初始位置位于全局坐标系 xOy 平面上, 椭圆中心位于坐标系原点, 裂纹面坐标系记为 $O_1x_1x_2x_3$, 如图 3(a) 所示。裂纹前缘上一点 B 的坐标 (x_0, y_0, z_0) 可由式 (7) 得到:

$$\begin{cases} x_0 = a \cos \theta \\ y_0 = c \sin \theta \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中: a, c 为椭圆的短半轴和长半轴尺寸; θ 为 B 点椭圆离心角, $\theta \in (-\pi, \pi]$ 。

B 点的法向量 $n = (2x_0/a^2, 2y_0/c^2, 0)$, 椭圆面的法向量 $m = (0, 0, 1)$, 则位于点 B 处的局部笛卡尔坐标系 $O_1x'_1x'_2x'_3$ 的基底向量为

$$\begin{cases} e'_1 = \frac{n}{\|n\|} \\ e'_2 = m \\ e'_3 = e'_1 \times e'_2 \end{cases} \quad (8)$$

式中: e'_1 为虚拟裂纹扩展方向; e'_2 垂直于裂纹面方向; e'_3 为裂纹前缘切向方向。

裂纹前缘两侧的单元面片宽度需相等, A 为裂纹面上的点, C 为虚拟裂纹扩展面上的点, 如图 3 (b) 所示。 $O'_1x'_1x'_2x'_3$ 为点 B 的裂尖局部坐标系, 原点坐标为 (x_0, y_0, z_0) , A, B, C 三点在坐标系 $O'_1x'_1x'_2x'_3$ 下的坐标分别为 $(-\Delta, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(\Delta, 0, 0)$ 。由同一点在不同坐标系下的转换关系求得 A 点和 C 点在全局坐标系下的坐标。

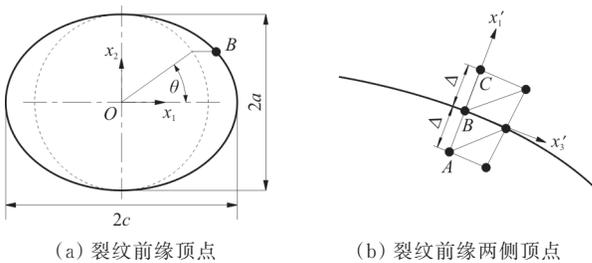


图 3 椭圆裂纹前缘面片顶点

Fig. 3 Vertices of element faces across the crack front

由此, 对椭圆上的离散点序列 (B_0, B_1, B_2, \dots) 的每一个点执行同样的操作, 可得位于裂纹面上的点序列 (A_0, A_1, A_2, \dots) 和位于裂纹虚拟扩展面上的点序列 (C_0, C_1, C_2, \dots) 的坐标, 对这三组点进行编号, 然后将这三组点按逆时针连接形成裂纹前缘三角面片, 同时对面片进行编号并记录面片和点的拓扑连接关系, 然后在 ABAQUS 中根据前面得到的点和三角面片连接关系及点坐标创建裂

纹几何部件, 如图 4 所示。需注意, 裂纹前缘三角面片应具有良好的形状以避免在后续模型网格生成中产生低质量四面体单元。

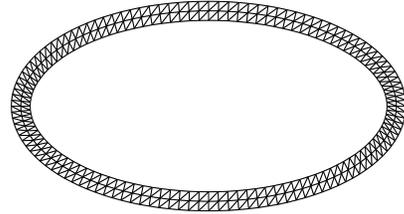


图 4 椭圆裂纹模板

Fig. 4 Elliptical crack front template

2.2 裂纹插入及裂纹相关数据信息

裂纹几何部件创建完成后, 根据裂纹定义接口文件里的裂纹位置、方位等信息, 在 ABAQUS 软件的 Assembly 模块里, 通过平移、旋转等操作将裂纹部件放置到指定位置, 同时计算旋转、平移操作后的裂纹前缘三角面片顶点的坐标, 然后和待分析结构件进行切割、合并等几何布尔运算完成裂纹几何特征的创建。对于表面裂纹或穿透裂纹, 由于裂纹前缘三角面片是预先产生的, 布尔运算后可能会在自由表面附近产生不规则的、影响后续网格划分的小边和小面, 需要进一步做小面删除、短边合并、新面添加等操作, 完成后对裂纹前缘三角面片顶点坐标、面片编号、面片面积等数据信息进行更新。

裂纹平面初始位置位于全局坐标系的 xOy 平面上, 裂纹面局部坐标系和全局坐标系重合。一个空间坐标系可以用另一个参考坐标系的三次空间旋转来表达, 由此可知, 空间任意位置的裂纹可通过将初始裂纹最多旋转三次来实现。假设裂纹插入位置的坐标为 (t_x, t_y, t_z) , 绕裂纹面局部坐标系 x_1 轴、 x_2 轴、 x_3 轴依次旋转 α, β 和 γ , 则对应的坐标转换矩阵^[25]为

$$T = R_\alpha R_\beta R_\gamma T_r \quad (9)$$

其中, $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma, T_r$ 的定义如下:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此, (x, y, z) 为某点的初始坐标, 则经旋转平移后的坐标 (x', y', z') 可由式(10)计算得到。

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix}^T = T \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

2.3 网格划分

四面体单元可以方便的自动化生成, 在有限元软件 ABAQUS 中对模型进行网格划分的步骤主要包括布种、网格生成技术和算法指定、单元形状和类型选择、单元尺寸增长比选择等。布种包括全模型布种和局部边或面布种, 两者分别从总体和局部描述了模型网格密度。读取网格设置接口文件里的全模型布种尺寸和局部边布种尺寸及边的查找坐标, 完成全局布种和局部边的布种, 裂纹前缘三角面片的每条边上强制布置一个单元, 单元类型设定为二次四面体单元(C3D10), 网格生成技术为自由网格划分, 算法选择默认网格生成算法。在关心部位的网格密度足够的情况下, 单元尺寸增长比可以有效控制模型总体单元规模。根据经验, 其他网格参数保持不变的情况下, 单元尺寸增长比取 1.0 时生成的模型四面体单元数量是取 1.5 时生成单元数量的 3~4 倍。单元尺寸增长比设置过小会导致网格规模偏大, 过大则可能会产生低质量单元进而影响计算结果。为了兼顾网格质量和计算效率, 通过迭代的方式决定单元尺寸增长比的大小。具体思路如下: 网格划分其余设置不变, 单元尺寸增长初值设为 1.5, 每次迭代初值减 0.1 直至 1.0 停止循环, 每次循环对模型进行一次网格划分, 划分完成后对网格质量进行评估, 如果该次循环没有警告单元, 跳出循环, 模型网格划分完成; 如果迭代至循环结束每一次循环均有警告单元, 取警告单元数量最少的网格为最终的模型网格。

2.4 节点集合和单元集合创建

模型网格划分完成后, 裂纹前缘的几何三角

面片与四面体单元面片重合。应用 VCCM 法计算断裂参数时载荷面片需要的数据信息有: 面片上的网格节点编号(图 2 中面片 S_1 上的节点 1, 2, 3, 4, 5 和 S_2 面片上的节点 1, 2, 3)、节点的载荷分配系数、节点力计算需要的四面体单元序列以及该面片上的局部坐标系; 位移面片需要的信息有: 位移网格节点编号(图 2 中面片 S'_1 上的节点 1, 2, 3, 4, 5 和 S'_2 面片上的节点 1, 2, 3) 和裂纹面上下表面节点的区分。

由上述分析可知, 计算 G 所需的节点力需要用裂纹面上方的单元来计算, 裂纹张开位移需要裂纹上表面位移节点和下表面对应节点的位移差来计算, 此过程均需判断四面体单元和面片的位置关系。和节点力节点(图 2 中面片 S_1 上的节点 1, 2, 3, 4, 5 和 S_2 面片上的节点 1, 2, 3) 关联的四面体单元可分为 3 种情况: ①四面体单元一个顶点和三角面片的顶点重合; ②四面体单元的一条单元边和三角面片的边重合; ③四面体单元的一个单元面和三角面片重合。如果根据四面体单元的顶点坐标去判断四面体单元和三角面片的位置关系, 需要进行较为繁琐的情况甄别和顶点选取, 而四面体单元的内切球球心必定和四面体单元位于面片的同一侧, 本文通过判断四面体内切球心和三角面片的位置来确定四面体单元和面片的位置关系。

点和面的位置关系可以通过判断该点和面内三点坐标组成的行列式的符号来判定。设三维空间点 a, b, c, d , 坐标分别为 $(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z), (c_x, c_y, c_z), (d_x, d_y, d_z)$, 定义行列式:

$$\det(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{vmatrix} \quad (11)$$

式(11)的几何意义为 a, b, c 三点逆时针排列, 当 $\det(a, b, c, d) < 0$ 时, d 点位于过 a, b, c 三点平面的上方; 当 $\det(a, b, c, d) > 0$ 时, d 点位于过 a, b, c 三点平面的下方。

由此可以得出四面体单元和三角面片的位置关系判断方法: ①根据四面体单元的顶点坐标计算四面体单元的内切球球心坐标; ②将三角面片的三个顶点坐标和四面体球心坐标带入式(11), 根据行列式的符号即可得四面体单元和面片的位置关系。

以面片 S'_1 为例来说明位移面片相关数据信息

建立过程:①根据裂纹面上三角面片 S'_i 的顶点坐标获得位移节点(图 2 中 S'_i 面片上节点 1, 2, 3, 4, 5) 的坐标;②根据坐标查找网格节点并获得节点编号, 需注意每个坐标对应的网格节点有两个, 分别属于裂纹面上表面和下表面;③获得和三角面片关联的两个四面体单元, 这两个单元分别属于裂纹面上表面和下表面, 根据四面体单元和三角面片的位置关系以及节点和单元的连接关系完成裂纹上下表面节点的区分。

以面片 S_1 为例来说明载荷面片相关数据信息的建立过程:①根据三角面片 S_1 的顶点坐标获得载荷节点(图 2 中 S_1 面片上 1, 2, 3, 4, 5 节点) 的坐标;②根据坐标查找网格节点, 获得网格节点编号, 同时计算该节点的载荷分配系数;③根据单元和节点连接关系获得包含该节点的所有四面体单元;④根据四面体单元和三角面片位置判断方法对第③步中获得的四面体单元进行过滤, 保留位于面片上方的单元。

对每一个位移面片和载荷面片按照上述方法建立计算 G 所需的数据信息, 所有的位移面片上的位移节点取并集得到节点集合 Set-NodesU, 所有载荷面片上节点力计算相关的单元取并集得到单元集合 Set-ElemsF, 这两个集合将用于定义输出位移和节点力。

2.5 输出定义

模型创建完成后, 调用 ABAQUS/Standard 生成模型的 *.inp 文件, 通过修改 *.inp 文件定义输出计算 G 所需的相关节点的位移和节点力至 *.dat 文件。定义输出节点力和位移的命令如下:

```
*EL PRINT, ELSET=Set-ElemsF
NFORC
*NODE PRINT, NSET=Set-NodesU
U
```

2.6 其他步骤

材料属性赋值: 读取材料属性定义文件里的材料属性参数, 调用函数完成模型材料属性赋值。

裂纹属性赋值: 有限元法以无应力面的形式来模拟裂纹, ABAQUS 软件里通过给面片或边赋 Seam 属性来定义裂纹, 生成网格时在 Seam 面片上产生重叠的重复节点, 在分析过程中节点分离来模拟裂纹受载。根据存储的裂纹面相关面片坐标

信息, 对几何面片赋 Seam 属性。

边界条件和载荷: 根据载荷和边界条件定义文件里的相关参数, 完成载荷施加和边界条件创建。

提交计算: 模型 *.inp 文件修改完成后, 调用函数提交计算。

断裂参数计算及结果保存: 有限元模型求解完成后, 读取输出文件 *.dat 里相关节点的位移和节点力, 根据前述的 VCCM 法理论并应用光顺技术^[11] 计算裂纹前缘 SIFs, 计算完成后将计算结果和对应位置的坐标、局部坐标系等相关信息保存至文件以供下一步操作。

3 数值算例

通过数值算例对 VCCM 法计算断裂参数的影响因素进行分析, 在此基础上, 对表面裂纹的 SIFs 进行计算。

3.1 VCCM 法影响因素分析

应用四面体单元计算得到的断裂参数沿裂纹前缘会出现震荡^[10-11], H. Okada 等^[11] 采用光顺技术来解决这一问题。光顺技术的核心思想是以一小段裂纹前缘上 G 的均值来取代单个面片的值。本文以 I 型和复合型内埋椭圆裂纹为例对光顺面片数量 N_e 、单元宽度 Δ 以及单元尺寸对 VCCM 法计算断裂参数的影响进行分析。

3.1.1 光顺面片数量

H. Okada 等^[11] 的研究表明, 随着 N_e 变大, 沿裂纹前缘计算结果波动变小, 但当 N_e 进一步取至 21 时, 裂纹前缘曲率变化大的位置的计算结果和理论解的相对误差扩大。原因是 N_e 值越大参与光顺的面片覆盖的裂纹段就越长, 裂纹前缘曲率变化大的裂纹段上 G 变化比较大, 而光顺算法的核心是取均值, 由此导致数值计算结果和真实值出现偏差。因此, N_e 值的选择倾向于相对小的值以避免光顺范围内的裂纹段上结果有明显波动, 文献^[11] 给出的建议是 N_e 取 5~15。然而, 当裂纹前缘某段曲率变化很大时, 即使 N_e 取相对小的值也不能解决上述问题。以文献^[11] 中的 I 型内埋椭圆裂纹算例为例, N_e 取 9, 当 a/c 取较大值时, VCCM 法计算结果和理论解最大相对误差均小于 2%; 当 a/c 取 0.2 时, VCCM 法的计算结果和理论解的最

大相对误差扩大至 3.9%。文献[11]没有给出 a/c 取更小值时 VCCM 法计算结果和理论解的对比,但有理由相信两者的误差会更大。该问题其中一个改善方法是沿曲线裂纹前缘非等尺寸布置单元,曲率大的地方单元尺寸适当减小,如图 4 所示。由此在特定的 N_e 值下,裂纹前缘曲率大的地方参与 G 光顺计算的面片覆盖的裂纹段减小,该裂纹段上的 G 波动范围也会相对减小。

承受远端拉伸载荷内埋斜置椭圆裂纹示意图如图 5 所示,当 $\gamma=0$ 时,裂纹尖端承受 I 型载荷。模型尺寸 $w=t=h=10c$, 可视为无限大体; γ 取 0, 裂纹前缘单元数 N_{len} 取 360, 单元宽度 Δ 取裂纹前缘平均单元尺寸 l_{ave} , $l_{ave}=L/N_{len}$, L 为裂纹前缘长度, a/c 分别取 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 模型单元数为 113 590~173 198, 节点数为 159 272~239 448, $a/c=0.5$ 时内埋椭圆裂纹有限元网格如图 6 所示。需注意,大多数情况下, Δ 取 l_{ave} 都能获得形状良好的裂纹前缘三角面片,但当 a/c 取很小的值(比如 0.1)时,有可能会产生自相交而导致建模失败,此时,可通过改变裂纹前缘单元数或减小单元宽度 Δ 来解决,这一过程由程序自动完成。

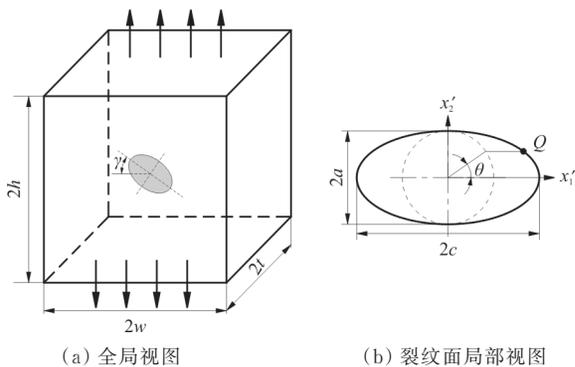


图 5 远端拉伸内埋斜置椭圆裂纹示意图
Fig. 5 The problem of embedded elliptical crack

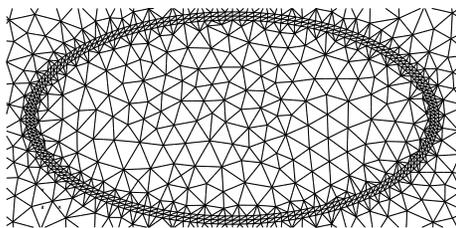


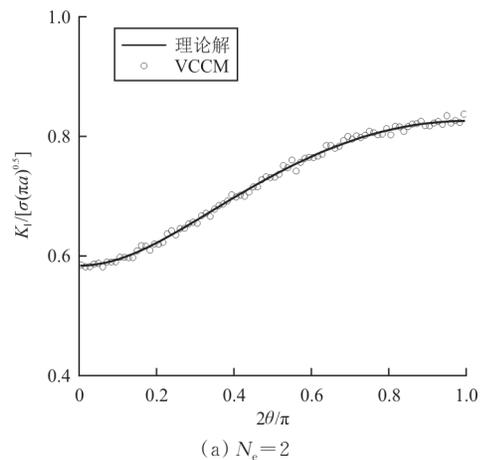
图 6 $a/c=0.5$ 时内埋椭圆裂纹有限元网格
Fig. 6 A typical finite element model for the embedded elliptical crack problem for the case of $a/c=0.5$

$a/c=0.5$, N_e 取不同值时 VCCM 法计算结果和理论解^[26]的对比如表 1 所示,为了更清晰地展示 N_e 取不同对 VCCM 法的影响,表 1 中的误差分析保留三位小数,后续的误差分析均保留两位小数。

表 1 $a/c=0.5$ 时 N_e 取不同值 VCCM 法计算结果误差分析
Table 1 Summary of error for mode I embedded elliptical crack with different N_e computing SIFs

N_e	平均误差/%	最大误差/%
2	0.507	1.639
6	0.269	0.767
10	0.175	0.590
14	0.143	0.544
18	0.122	0.429
22	0.115	0.433
26	0.128	0.336
30	0.145	0.360

从表 1 可以看出: $N_e=2$ 时,计算结果和理论解的平均误差和最大误差分别为 0.507% 和 1.639%,但波动明显,如图 7(a) 所示;随着 N_e 进一步变大,计算结果波动性变小,和理论解的相对误差变小,当 N_e 取至 30 时,计算结果和理论解依然吻合非常好,平均误差为 0.145%,最大相对误差为 0.360%,如图 7(b) 所示,并没有出现文献[11]中误差明显扩大的现象,说明在当前的裂纹前缘网格布置下(如图 4 和图 6 所示),VCCM 法计算断裂参数的稳定性有提高。综合各方面因素,本文后续的分析中, N_e 取 10。



(a) $N_e=2$

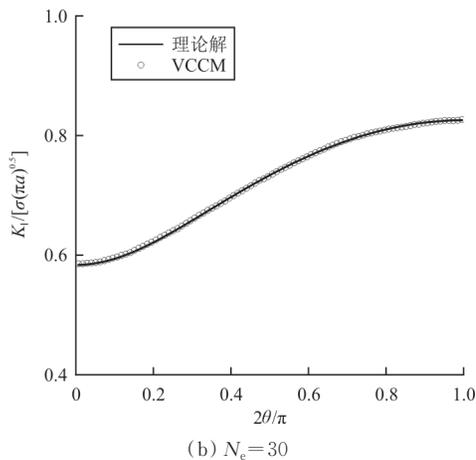


图 7 N_e 取不同值 VCCM 法计算结果和理论解的对比
Fig. 7 The distributions of the stress intensity factor along the crack front for different N_e

a/c 取不同值时 VCCM 法计算结果和理论解^[26]的误差分析如表 2 所示,可以看出:当 $a/c \geq 0.4$ 时, VCCM 法计算结果和理论解吻合非常好,平均误差小于 0.24%,最大误差小于 0.71%;随着 a/c 变小,误差稍有扩大,但依然和理论解吻合很好,当 $a/c=0.2$ 和 $a/c=0.1$ 时,平均误差分别为 0.53% 和 1.64%,最大相对误差分别为 1.02% 和 3.03%。误差变大的原因是小的 a/c 值靠近长轴的裂纹前缘单元尺寸小,单元宽度取定值导致的单元形状不够优良。

表 2 I 型内埋椭圆裂纹误差分析

Table 2 Summary of error for mode I embedded elliptical crack with fixed-width element faces

a/c	平均误差/%	最大误差/%
0.1	1.64	3.03
0.2	0.53	1.02
0.4	0.19	0.68
0.5	0.17	0.59
0.6	0.17	0.63
0.8	0.23	0.70
1.0	0.22	0.70

3.1.2 单元宽度

由前面的分析可以看出,当 a/c 取很小的值,比如 0.1 时, VCCM 法的计算结果和理论解的误差

稍有扩大,原因是裂纹前缘的单元形状不够优良。本节裂纹前缘面片采用变宽度,单元宽度等于单元尺寸,如图 8 所示。模型尺寸 $w=t=h=10c$,裂纹前缘单元数 N_{len} 取 360, a/c 分别取 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 模型单元数为 94 414~131 068,节点数为 133 788~183 942。VCCM 法计算结果和理论解的误差分析如表 3 所示,可以看出: $a/c=0.1$ 时,相较于裂纹前缘单元宽度取定值,计算结果和理论解的平均误差和最大误差均有改善; $a/c=0.2$ 时,平均误差有小幅改善,但最大相对误差稍有扩大; $a/c \geq 0.4$ 时,两种裂纹前缘单元布置的数值计算结果很接近。

两种裂纹前缘单元布置的计算结果说明单元宽度对 VCCM 法的影响很小,裂纹前缘单元具有良好的形状即可获得非常好的结果。实际上,对于真实裂纹,小的 a/c 值对应的裂纹形状是不稳定的,在疲劳载荷的作用下,裂纹前缘陡峭的地方随着裂纹的扩展会快速变得平缓。

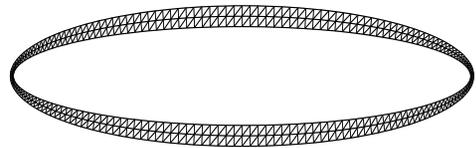


图 8 变宽度单元面片的椭圆裂纹模板
Fig. 8 Elliptical crack front template with changing element width

表 3 I 型内埋椭圆裂纹误差分析

Table 3 Summary of error for mode I embedded elliptical crack with changing-width element faces

a/c	平均误差/%	最大误差/%
0.1	1.11	1.91
0.2	0.41	1.43
0.4	0.23	0.76
0.5	0.16	0.52
0.6	0.22	0.88
0.8	0.19	0.59
1.0	0.19	0.80

3.1.3 单元尺寸

本节对复合型内埋椭圆裂纹的 SIFs 进行计算

并和理论解^[26]进行对比,研究单元尺寸对 VCCM 法计算断裂参数的影响。模型尺寸 $w=t=h=10c$,模型尺寸大于 10 倍裂纹尺寸,可视为无限大体, γ 取 $\pi/4$,裂纹前缘单元数 N_{len} 分别取 180 和 360, a/c 分别取 0.4,0.6,0.8,裂纹前缘单元宽度 Δ 取定值 l_{ave} 。 N_{len} 取 180 时,模型单元数为 56 644~65 957,节点数为 82 847~95 730; N_{len} 取 360 时,模型单元数为 87 619~128 285,节点数为 125 930~180 278。复合型内埋椭圆裂纹误差分析如表 4 所示。

表 4 复合型内埋椭圆裂纹误差分析
Table 4 Summary of error for mixed mode embedded elliptical crack

断裂裂纹类型	a/c	平均误差 (%)		最大误差 (%)	
		$N_{len}=180$	$N_{len}=360$	$N_{len}=180$	$N_{len}=360$
I	0.4	0.35	0.23	0.74	0.79
	0.6	0.35	0.25	0.82	0.86
	0.8	0.24	0.27	0.77	0.98
II	0.4	1.21	0.57	1.50	1.02
	0.6	0.56	0.45	1.94	1.10
	0.8	0.57	0.36	1.62	0.77
III	0.4	0.68	0.32	3.27	1.77
	0.6	0.61	0.27	2.67	1.46
	0.8	0.47	0.30	2.36	1.11

从表 4 可以看出:随着裂纹前缘网格加密, VCCM 法计算的 I、II、III 型应力强度因子 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} 和理论解的平均误差均减小, K_{II} 、 K_{III} 和理论解最大误差同样减小, K_I 和理论解的最大误差反而有小幅增大。说明随着网格加密,裂纹前缘上绝大多数位置的数值计算结果和理论解的误差均减小,个别位置的 K_I 值和理论解误差稍有扩大。 $N_{len}=180$ 时, VCCM 法计算的 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} 和理论解的平均误差为 0.24%~0.35%、0.56%~1.21%、0.47%~0.68%; $N_{len}=360$ 时, VCCM 法计算的 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} 和理论解平均误差为 0.23%~0.27%、0.36%~0.57%、0.27%~0.32%。表明两种网格均得到了很好的结果,同时也说明单元尺寸对 VCCM 法的影响有限。

3.2 I 型表面裂纹应力强度因子计算

远端拉伸有限宽板表面裂纹示意图如图 9 所

示,模型尺寸 $w=h=5t=10c$,裂纹前缘单元宽度 Δ 取定值 l_{ave} , a/c 分别取 0.6 和 0.8, N_c 取 10,模型单元数分别为 113 925、120 694,节点数为 168 450、178 258。VCCM 法计算结果和 Newman-Raju 解^[26]的对比如图 10 所示,纵轴为无量纲应力强度因子 $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$,横轴为归一化后的椭圆角 $2\theta/\pi$ 。当 a/c 分别取 0.6 和 0.8 时, VCCM 法计算结果和 Newman-Raju 解的平均相对误差分别为 1.13% 和 0.57%,最大相对误差分别为 1.97% 和 1.47%。

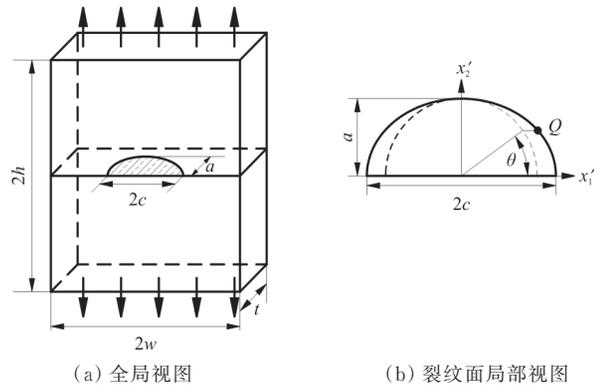


图 9 有限宽板表面裂纹
Fig. 9 The problem of semi-elliptical surface crack

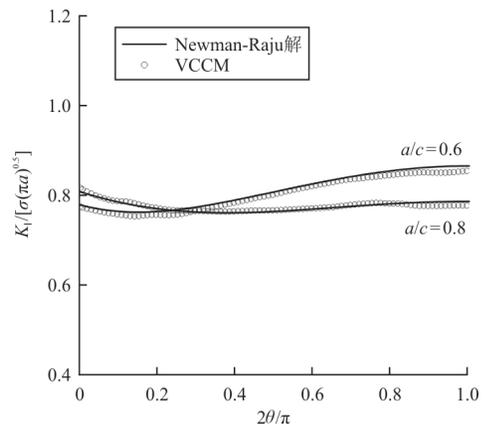


图 10 a/c 分别取 0.6 和 0.8 时裂纹前缘应力强度因子分布

Fig. 10 The distributions of the SIFs for a/c being 0.6 and 0.8

4 结 论

(1) 通过显式创建裂纹前缘单元面片结合布种控制单元分布实现了基于二次四面体单元 VCCM 法的三维裂纹建模。全模型采用常规四面体单元显著简化了建模流程,提高了三维裂纹自动

化建模的稳定性和鲁棒性。

(2) 本文开发了基于二次四面体单元 VCCM 法的参数化三维裂纹分析程序包, 实现了三维裂纹从建模到断裂参数计算的全流程自动化, 有效提升了三维裂纹问题的分析效率。

(3) 单元宽度和单元尺寸对二次四面体单元 VCCM 法影响有限, 数值算例结果和文献结果一致性良好。

(4) 本文的建模方法同样可用于其他有限元软件的三维裂纹全自动化建模。此外, 本文的程序包可用于三维裂纹疲劳扩展的全自动化数值模拟。

参考文献

- [1] BARSOU R S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976, 10(1): 25-37.
- [2] HENSHELL R D, SHAW K G. Crack tip finite elements are unnecessary [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1975, 9(3): 495-507.
- [3] DAVIS B R, WAWRZYNEK P A, CARTER B J, et al. 3-D simulation of arbitrary crack growth using an energy-based formulation—Part II: non-planar growth [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, 154: 111-127.
- [4] DHONDT G. Application of the finite element method to mixed-mode cyclic crack propagation calculations in specimens [J]. *International Journal of Fatigue*, 2014, 58: 2-11.
- [5] DORCA B P. Three-dimensional mixed-mode crack propagation calculations based on a submodel technique [D]. Delft: Delft University of Technology, 2018.
- [6] MALIGNO A R, RAJARATNAM S, LEEN S B, et al. A three-dimensional (3D) numerical study of fatigue crack growth using remeshing techniques [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, 77(1): 94-111.
- [7] SCHÖLLMANN M, FULLAND M, RICHARD H A. Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70(2): 249-268.
- [8] RABOLD F, KUNA M, LEIBELT T. Procrack: a software for simulating three-dimensional fatigue crack growth [M] // APEL T, STEINBACH O. *Advanced finite element methods and applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 355-374.
- [9] BRANCO R, ANTUNES F V, COSTA J D. A review on 3D-FE adaptive remeshing techniques for crack growth modelling [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, 141: 170-195.
- [10] RAJARAM H, SOCRATE S, PARKS D M. Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, 66(5): 455-482.
- [11] OKADA H, KAWAI H, ARAKI K. A virtual crack closure-integral method (VCCM) to compute the energy release rates and stress intensity factors based on quadratic tetrahedral finite elements [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75(15): 4466-4485.
- [12] OKADA H, KAWAI H, TOKUDA T, et al. Fully automated mixed mode crack propagation analyses based on tetrahedral finite element and VCCM (virtual crack closure-integral method) [J]. *International Journal of Fatigue*, 2013, 50: 33-39.
- [13] TANAKA S, MAEDA K, TAKAHASHI H, et al. A crack propagation simulation for a steel CHS T-joint employing an advanced shell-solid finite element modelling [J]. *Journal of Marine Science and Technology*, 2022, 27: 1-15.
- [14] NEJATI M, PALUSZNY A, ZIMMERMAN R W. A disk-shaped domain integral method for the computation of stress intensity factors using tetrahedral meshes [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 69-70: 230-251.
- [15] NEJATI M, PALUSZNY A, ZIMMERMAN R W. On the use of quarter-point tetrahedral finite elements in linear elastic fracture mechanics [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, 144: 194-221.
- [16] 唐俊星, 陆山. 三维裂纹整体参数化模拟方法 [J]. *航空动力学报*, 2008, 23(4): 737-741.
TANG Junxing, LU Shan. A integral parameter-based modeling method for 3D crack [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(4): 737-741. (in Chinese)
- [17] 李宇飞, 陶海亮, 高庆, 等. 三维非平面裂纹扩展参数化模拟方法 [J]. *航空动力学报*, 2017, 32(12): 2888-2895.
LI Yufei, TAO Hailiang, GAO Qing, et al. Parametric simulation method for 3-D non-planar crack propagation [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2017, 32(12): 2888-2895. (in Chinese)
- [18] 齐桂营. 具有倾斜裂纹的 CTS 试样三维断裂行为研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2011.
QI Guiying. Study on 3D-fracture behavior in CTS-specimen with inclined crack [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2011. (in Chinese)
- [19] 黄如旭, 万正权. 三维裂纹扩展数值预报方法研究 [J]. *中国造船*, 2019, 60(1): 11-21.
HUANG Ruxu, WAN Zhengquan. Numerical prediction method for 3D crack growth [J]. *Shipbuilding of China*, 2019, 60(1): 11-21. (in Chinese)
- [20] 张智轩, 石多奇, 杨晓光. 含销钉孔边裂纹的某压气机叶轮裂纹扩展分析 [J]. *航空动力学报*, 2016, 31(3): 567-574.

- ZHANG Zhixuan, SHI Duoqi, YANG Xiaoguang. Analysis of crack propagation for a compressor disk with cracks on pinholes[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(3): 567-574. (in Chinese)
- [21] 刘鹤, 杨晓光, 石多奇. 一种用于航空发动机热端部件三维裂纹行为分析的数值方法[J]. 机械工程学报, 2019, 55(13): 102-112.
- LIU He, YANG Xiaoguang, SHI Duoqi. A numerical approach to investigate 3D crack behavior on aeroengine hot-end components [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(13): 102-112. (in Chinese)
- [22] HARRIS C R, MILLMAN K J, WALT S J VAN DER, et al. Array programming with NumPy [J]. Nature, 2020, 585: 357-362.
- [23] VIRTANEN P, GOMMERS R, OLIPHANT T E, et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python[J]. Nature Methods, 2020, 17(3): 261-272.
- [24] SOBOTKA J C, MCCLUNG R C. Automatic 3D crack placement using the Python API in ABAQUS CAE [C]// Science in the Age of Experience. Boston, Massachusetts: [s. n.], 2018: 1-9.
- [25] VINCE J. Mathematics for computer graphics [M]. 5th ed. London: Springer, 2017.
- [26] 中国航空研究院. 应力强度因子手册(增订版)[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 649-651.
- Chinese Aeronautical Establishment. Stress intensity factors handbook (Updated Version)[M]. Beijing: Science Press, 1993: 649-651. (in Chinese)

作者简介:

高文(1988—),男,博士研究生。主要研究方向:结构疲劳、断裂、损伤容限、可靠性,固体力学数值计算方法。

王生楠(1963—),男,博士,教授。主要研究方向:结构疲劳、断裂、损伤容限、可靠性,计算结构力学,飞行器结构适航验证技术。

(编辑:马文静)

(上接第 63 页)

- status of equipment support verification [J]. Aerodynamic Missile Journal, 2018(1): 72-76,91. (in Chinese)
- [10] 程继红, 张光宇. 美军装备保障相关理念演进[J]. 舰船电子工程, 2020, 40(8): 4-8,18.
- CHENG Jihong, ZHANG Guangyu. A brief analysis of the evolution of related concepts of US military equipment support [J]. Ship Electronic Engineering, 2020, 40(8): 4-8, 18. (in Chinese)
- [11] 姚世锋, 柏彦奇, 乔良. 美军基于性能的保障模式及启示 [J]. 军事交通学院学报, 2020, 22(4): 47-52.
- YAO Shifeng, BAI Yanqi, QIAO Liang. Performance-based logistics mode of US army and its enlightenment [J]. Journal of Military Transportation University, 2020, 22(4): 47-52. (in Chinese)
- [12] 严志腾, 戴荣, 马好东. 装备综合保障包评价方法研究 [J]. 计算机测量与控制, 2019, 27(9): 267-271.
- YAN Zhiteng, DAI Rong, MA Haodong. Reseach on evaluation method of equipment integrated support package [J]. Computer Measurement & Control, 2019, 27(9): 267-271. (in Chinese)
- [13] 张昆鹏. 提高数据链装备维修保障的对策与建议[J]. 科技传播, 2010(16): 72.
- ZHANG Kunpeng. Countermeasures and suggestions for improving data link equipment maintenance support [J]. Science and Technology Communication, 2010(16): 72. (in Chinese)
- [14] XAVIER B. Does supply chain visibility enhance agility [J]. Production Economics, 2016(1): 11-15.
- [15] HONG Sheng. Cascading failure and recovery of spatially interdependent networks [J]. Journal of Statistical Mechanics Theory & Experiment, 2017(10): 103208.
- [16] WANG Baoqing. Cascading failure analysis and restoration strategy in an interdependent network [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2016, 49(19): 195101.
- [17] HONG Sheng. Epidemic spreading model of complex dynamical network with the heterogeneity of nodes [J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(11): 8.

作者简介:

姜涛(1974—),男,博士,正高级工程师。主要研究方向:装备体系与综合保障。

钱征文(1984—),男,博士,助理研究员。主要研究方向:装备综合保障。

(编辑:马文静)