# 基于响应面法的齿轮容差设计方法研究

王桂华<sup>1</sup>,井海龙<sup>2</sup>,史妍妍<sup>1</sup>,陈云霞<sup>2</sup>

(1. 中航工业沈阳发动机设计研究所,沈阳 110015; 2. 北京航空航天大学 可靠性与系统工程学院,北京 100191)

摘要:随着附件传动系统不断向高速、重载方向发展,齿面接触可靠性问题越来越受关注。为提高齿轮可靠性,分析了齿轮传动系统常见误差类型及影响,开展了齿轮容差设计初步探讨。根据齿轮制造、加工及系统动态误差的产生原理和作用方式,基于齿轮接触应力仿真结果,确定了影响齿轮接触应力随机性的5种主要误差形式及其特征量分布规律,提出了基于响应面法的齿轮容差设计方法,给出了齿轮系统公差设计的改进方向:在进行齿轮公差设计时,重点控制H、V方向的轴向平行度公差。

关键词:齿轮;容差设计;可靠性;接触应力;随机性;响应面;传动系统;敏感性分析

中图分类号: V215.1 文献标识码:A doi:10.13477/j.cnki.aeroengine.2016.03.001

Methods of Tolerance Design for Gears Based on Response Surface Methodology

WANG Gui-hua<sup>1</sup>, JING Hai-long<sup>2</sup>, SHI Yan-yan<sup>1</sup>, CHEN Yun-xia<sup>2</sup>

(1. AVIC Shenyang Engine Design and Research Institute, Shenyang 10015; 2. School of Reliability

and Systems Engineering, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract: With the accessory driving system takes the way towards the high speed and heavy load, the contact reliability of aviation gears make more sense. In order to improve the reliability, the common error types and effects of gear driving system were analyzed, and the study of tolerance design was proposed. According to gear processing and manufacturing, the principle and action-mode of the systematic dynamic error, five main error types and their characteristics of the random error of the contact stress of the gear were determined on the basis of the simulation results. Moreover, a method of gear tolerance design based on response surface was proposed and the improvement direction of tolerance design of gear system was given: the tolerance for the direction of H and V should be mainly controlled during the tolerance design.

Key words: gear; tolerance design; reliability; contact stress; randomness; response surface; driving system; sensitivity analysis

## 0 引言

随着航空发动机推重比不断提高,附件传动系统 逐渐向高速、重载方向发展,越发严苛的工作条件也 对传动齿轮提出了更高的可靠性要求<sup>III</sup>。在航空发动 机维修过程中发现,80%以上的齿轮失效是齿面接触 疲劳造成的<sup>III</sup>。因此,研究齿轮的齿面接触应力可靠 性,对提高附件传动系统及发动机整体工作的可靠性 意义重大。

齿轮的工作可靠性受到多种随机因素的综合作用,其中制造、加工及系统动态误差的存在是随机性 产生的主要原因。文献[3]针对不同轴线平行度偏差对 某附件机匣传动系统轴系结构的影响进行对比仿真 分析;文献[4]建立了带有安装与制造误差的齿轮参数 化模型,并对其进行动态仿真,得到齿轮在安装与制 造误差影响下的动态接触应力;文献[5]针对斜齿轮进 行建模及仿真,分析了齿轮在齿侧间隙误差和轴平行 度误差下力学性能的变化;文献[6]得到了齿形误差及 公差对齿轮振动的影响。

以上研究仅针对单一误差对齿轮传动系统齿轮 性能的影响做了分析,而对于多种误差协同作用对齿 轮性能的影响,及每种误差因素的影响程度,并没有 给出明确的结论。

本文根据齿轮制造、加工及系统动态误差的产生

收稿日期:2015-12-30 基金项目:航空动力基础研究项目资助

作者简介:王桂华(1965),女,博士,自然科学研究员,从事航空发动机强度与可靠性设计工作;E-mail:wangguih@sina.com。

**引用格式:** 王桂华,井海龙,史妍妍,等.基于响应面法的齿轮容差设计方法研究 [J]. 航空发动机,2016,42 (3):1-6. WANG Guihua, JING Hailong, SHI Yanyan, et al. Methods of tolerance design for gears based on response surface methodology[J]. Aeroengine, 2016,42(3):1-6.

原理和作用方式,确定了影响齿轮接触应力随机性的 5种主要误差形式及其特征量分布规律,提出了基于 响应面方法的齿轮公差设计方法,并给出了齿轮系统 公差设计的改进方向。

## 1 齿面接触应力随机性模型的构建

## 1.1 齿轮加工误差的影响分析

受到机床加工精度 等客观因素的限制,在齿 轮加工过程中不可避免 会存在一定的误差。根据 对齿轮传动性能的影响, 归纳为主要影响传递运 动准确性、传动平稳性和 载荷分布均匀性的3组 -误差项。其中,影响齿面 接触应力可靠性的主要 是第2、3组,见表1。

表 1 影响齿面接触应力的						
加工误差						
误差组	误差项					
	齿切向综合误差					
	齿径向综合误差					
影响传动平稳性	<b></b> 齿形误差					
	基节偏差					
	齿距偏差					
	齿向误差					
影响载荷分布均 匀性	齿厚偏差					
	公法线平均长度					
	偏差					

1.2 齿轮装配误差的影 响分析

发动机附件机匣通常采用多平行轴齿轮传动系 统,装配中主要存在以下2类误差:

(1)中心距偏差(Δfa)。是指在齿轮副的齿宽中间 平面内,实际中心距与公称中心距之差。

(2)轴线平行度误差。是指1对齿轮的轴线分别 在2个基准平面上投影的平行度误差(在等于齿宽的

长度上测量),具体分为轴 线平面内的偏差(fsa)和垂 直平面上的偏差 (f<sub>SB</sub>), 简 瓣 称 H、V 方向的轴线平行 度误差。具体形式如图 1 所示。



## 1.3 齿轮系统动态误差的影响分析

齿轮系统动态误差是指齿轮系统受到温度、振动 和工作载荷等综合作用时,由其装配环境的变化引起 的误差类型。该类误差一般与齿轮装配误差相互耦 合,可以累加入装配误差之中。

本文主要针对影响齿轮接触应力的误差类型进 行研究,根据每类误差的形成原理和作用方法,结合 工程经验,筛选出影响齿轮接触应力的2类加工误差 和3类装配误差,如图2所示。

根据齿轮产品在机械 加工装配过程中各设计参 数分布的特性,结合齿轮 传动系统的实际设计资 料,以附件机匣1对齿轮 图2 影响齿轮接触应力的 为例,得到了其5类误差 参数,见表2。



误差类型

表2	齿轮公差信息	
误差名称	分布规律	数字特征
	截尾正态	[-0.015,0.015],mm
甲心距偏差		$\mu$ =0, $\sigma$ =0.005
日方向轴线亚行庙涅差	裁尼正太	[-0.0572,0.0572],(°)
□刀问抽线十门及庆左	戦圧止心	$\mu$ =0, $\sigma$ =0.01906
C 古向妯娌亚石康涅兰	截尾正态	[-0.0572,0.0572],(°)
6 刀凹抽线干门及伏左		$\mu$ =0, $\sigma$ =0.01906
齿形误差	均匀分布	[0.003,0.006],mm
八帝国上国汨光	截尾正态	[0.07,0.14],mm
分度回西岸侯差		$\mu$ =0, $\sigma$ =0.0466

#### 1.4 构建误差齿轮模型

本文在标准齿轮副应力仿真的基础上,考虑齿轮 存在的误差类型,根据各类误差的定义或常见形式,将 其直接或间接转化后加入到常规标准齿轮副中形成齿 轮误差模型,进行基于有限元的误差齿轮应力仿真。

根据定义,构造齿轮副中心距偏差和轴线平行度 误差,如图3、4所示;将分度圆齿厚误差转换成齿轮 某1齿面的偏置,如图5所示;在齿轮实际生产制造

中,多数齿形误差为中凹 型,且齿形误差一般处于 齿面中部,所占齿面面积 约为1/2,因此,针对齿轮 模型构造中凹齿形误差轮 齿,如图6所示。





## 1.5 误差齿轮的接触应力仿真分析

采用有限元方法进行上述 5 种误差因素协同作 用下的齿轮接触应力仿真分析。根据表2确定的误差



图 5 分度圆齿厚误差

分布规律,随机抽样确定 有限元仿真的误差参数组 合,同时利用有限元瞬态 动力学仿真确定最大应力 出现的相位,从而建立处 于最大应力相位的齿轮误 差模型,进而采用有限元 静力学仿真进行基于齿轮 误差模型的应力仿真分 析。具体流程如图7所示。





## 2 基于响应面的齿轮系统公差设计

#### 2.1 基本原理

基于响应面的齿轮公差设计,首先根据齿轮误差 参数的分布类型进行抽样,确定误差参数仿真集,利 用误差齿轮的接触应力仿真分析方法确定误差参数 及对应的齿轮接触应力大小,根据抽样样本及对应的 应力仿真结果建立齿轮系统应力与误差参数的响应 面模型;其次根据响应面模型进行误差参数敏感性分 析,确定其每种误差参数的敏感性及单因素条件下的 最坏情况,再进行综合误差因素最坏情况分析,确定 综合误差因素下的最大应力,若2种最坏情况的最大 应力任何1个不满足要求,则计算其可靠度,若可靠 度不满足要求,则需找出最坏参数组合,进而根据单 因素敏感性分析结果进行参数的优化设计,具体流程 如图8所示。

### 2.2 齿轮系统接触应力响应面模型构建

响应面法<sup>10</sup>的基本原理是:首先假设1个包含未 知系数的、由状态变量与基本变量构成的解析表达 式,然后用拟合的方法确定未知系数以表达隐式函数 或高度非线性函数。多项式系数的确定一般以试验设 计为基础,应用正交设计或均匀设计回归得到特定因 子的最小二乘估计。采用该方法时,随机变量的个数



#### 图 8 基于响应面的齿轮系统公差设计

在结构力学分析领域,响应面函数模型常采用2 阶多项式形式[9]

$$y = a + \sum_{i=1}^{n} b_{i} x_{i} + \sum_{i=1}^{n} c_{i} x_{i}^{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} x_{i} x_{j}$$
(1)

式中:a、bi、ci、di为待定系数;xi和 xi(i=1,2,…,n; j=1,2, …,n-1)为基本变量。

由于齿轮误差种类较多且具有截尾分布的特点, 在保证抽样结果合理性的同时,考虑仿真分析的效 率。本文采用超拉丁立方<sup>100</sup>抽样得到 80 次仿真的样 本值,建立齿轮系统试验误差组合集,并进行误差齿 轮的接触应力仿真分析。

利用前 70 组数据进行响应面建模,后 10 组数据 进行响应面模型的验证。利用完全2阶多项式对前 70 组数据拟合得到接触应力的响应面模型  $\sigma$ =591.2790-2017.0018 × X<sub>1</sub>+117827.9547 × X<sub>2</sub>+347.5501 ×  $X_3$ -1239.4857 ×  $X_4$ -121.2541 ×  $X_5$ +925673.5836 ×  $X_1$  ×  $X_2$ -21080.0740 ×  $X_1$  ×  $X_3$ +14224.7177 ×  $X_1$  ×  $X_4$ -812.5432  $\times$  X<sub>1</sub>  $\times$  X<sub>5</sub>+215448.7605  $\times$  X<sub>2</sub>  $\times$  X<sub>3</sub>-45228.9853  $\times$  X<sub>2</sub>  $\times$ 

	表 3 响应面模型验证结果				
序号	仿真结果 /MPa	模型预测结果 /MPa	误差 /%		
1	967.04	976.15885	0.94		
2	680.50	655.88067	3.62		
3	762.60	797.92593	4.63		
4	775.43	818.13944	5.51		
5	756.53	719.02033	4.96		
6	935.18	859.04106	8.14		
7	924.33	942.28902	1.94		
8	992.05	944.16016	4.83		
9	873.92	855.91764	2.06		
10	777.45	777.94834	0.06		

 $\begin{array}{ll} X_4-53595.8962\times X_2\times X_5+40690.6147\times X_3\times X_4-\\ 21928.5601\times X_3\times X_5+120123.1595\times X_4\times X_5-9963.9554\\ \times X_1\times X_1-23433625.0394\times X_2\times X_2+184224.6109\times\\ X_3\!\!\times\!\!X_3\!\!+\!85823.1455\!\!\times\!\!X_4\!\!\times\!\!X_4\!\!+\!14399.8515\!\!\times\!\!X_5\!\!\times\!\!X_5 \quad (2)\\ X_1\!\!=\!\!-0.8143\times X_{11}\!\!+\!0.184 \quad (3) \end{array}$ 

式中: $\sigma$ 为接触应力; $X_{11}$ 为分度圆齿厚误差,单位为 mm; $X_1$ 为有限元仿真输入参数,反映了分度圆齿厚 误差,单位为 mm; $X_2$ 为齿形误差,单位为 mm; $X_3$ 为 中心距偏差,单位为 mm; $X_4$ 为 H 方向轴向平行度误 差,单位为°; $X_5$ 为 V 方向轴向平行度误差,单位为°。

利用后 10 组数据进行接触应力模型的验证,验 证结果见表 3。

从表中可见,齿轮系统

接触应力响应面模型预测 结果与仿真分析结果误差 在 10%以内,认为模型可 以作为后续分析的依据。

利用协方差矩阵进行 贡献率分析,得到分度圆 齿厚误差、齿形误差、中心

距偏差和 H、V 方向轴向平行度误差这 5 种误差参数 对应力分析结果的贡献率<sup>111</sup>分别为 26.5874%、 22.8871%、20.8440%、18.2140%和 11.4675%。

#### 2.3 误差参数敏感性分析

敏感性分析是指从定量分析的角度研究有关因 素发生某种变化对某1个或

1 组关键指标影响程度的 1 种不确定分析技术。其实质 是通过逐一改变相关变量数 值来解释关键指标受这些因 素变动影响大小的规律。



分别将不同的齿轮误差因素设为单一变量,通过 固定其它4种误差因素,对每种误差因素进行齿轮接 触应力敏感性分析。

首先以齿厚误差为例,分别固定齿形误差、中心 距偏差和H、V方向轴向平行度误差为均值,分析齿 厚误差对齿轮系统接触应力的影响,如图9所示。

从图中可见,在固定齿形误差、中心距偏差和H、 V方向轴向平行度误差这4个误差因素的条件下,分 度圆齿厚误差在[0.07,0.14]范围内变化时,齿轮的接 触应力范围为[744.7,762.8],应力幅值相对于应力均



值的变化率为 0.045%, 变化不明显。

以此类推,得到:

(1)齿形误差在[0.003,0.006]范围内变化时,齿轮的接触应力范围为[704.7,761.9],应力幅值相对于应力均值的变化率为4.04%,变化不明显,如图10所示。

(2)中心距偏差在[-0.015,0.015]范围内变化时, 齿轮的接触应力范围为[761.1,814.5],应力幅值相对 于应力均值的变化率为 3.39%,变化不明显,如图 11 所示。

(3)H方向轴向平行度误差在[-0.0572,0.0572]范 围内变化时,齿轮的接触应力范围为[761.9,1045.4],应 力幅值相对于应力均值的变化率为 15.7%,变化明显; V方向轴向平行度误差在[-0.0572,0.0572]范围内变化 时,齿轮的接触应力范围为[758.5,834.2],最大应力相 对最小应力变化 4.75%,变化不明显,如图 12 所示。

根据单误差因素敏感性分析结果,确定各误差参数的敏感性由高到低为:H方向轴向平行度误差、V 方向的轴向平行度误差与齿形误差、中心距偏差和分 度圆齿厚误差。因此,在进行公差设计时,应按上述敏 感性从高到低考虑。

#### 2.4 综合误差因素最坏情况分析

最坏情况分析法是1种按照不常发生的最坏使 用条件的组合为基础,进行确保系统可靠性要求的设 计方法<sup>[12]</sup>,是1种非概率统计方法,用来分析系统的 设计参数和各种内、外影响因素的参数处于最坏情况 或最坏组合情况下的系统性能参数偏差。对于大规模 复杂系统来说,用其分析各类参数处于最坏情况下系 统的性能是否还满足指标要求,并找出导致系统性能 参数处于最坏情况下的设计参数和影响因素的组合 规律。

应用该方法的前提是假设各类影响因素对系统 的影响是呈单调性的,即影响因素的参数取标称值时 系统处于最理想状态,其参数偏离标称值越大对系统 的影响也越大<sup>113</sup>。由敏感性分析可知,本文研究的 5 个误差因素只有 H、V 方向的轴向平行度误差对系统 的影响呈现单调性。结合接触应力的响应面模型,采 取仿真与数值分析相结合的方法进行最坏情况分析, H、V 方向的轴向平行度误差 2 个参数采取上、下极 限值全面组合的方法,其余 3 个参数采取数值分析的 方法进行 3 参数下的最大应力分析。具体流程如图 13 所示。



分别对 H、V 方向轴向平行度误差的极限值(±0.0572°)进行全面组合,确定分度圆齿厚误差、齿形 误差和中心距偏差 3 参数的响应面,利用数值的方法 确定其最大应力,分析结果见表 4。

表 4 综合因素最坏情况分析结
-----------------

序号	H方向轴向平	V方向轴向平	齿厚误差1	齿形误差1	中心距偏	接触应力1
1.1.2	行度误差 /°	行度误差1。	mm	mm	差 /mm	MPa
1	0.0572	0.0572	0.07	0.003	0.0410	1526.5
2	0.0572	-0.0572	0.12	0.003	0.0068	827.5
3	-0.0572	0.0572	0.13	0.003	-0.0078	795.1
4	-0.0572	-0.0572	0.13	0.030	-0.0065	1587.1

齿轮的接触疲劳极限为 1500 MPa,其设计安全 系数为 1.0。从表中可见,在极限 1、4 状态下,不满足 齿轮接触应力的要求。

#### 2.5 基于响应面的齿轮系统可靠度分析

将齿轮的齿面安全系数作为可靠性分析的指标, 由齿轮设计要求可知齿轮齿面的计算安全系数不能 小于设计安全系数。因此,齿轮副的可靠度定义为在 随机误差综合影响下齿轮副的计算安全系数不大于 设计安全系数的概率,表达式如下

$$\mathsf{R}=\mathsf{P}\{\mathsf{n}\leqslant\mathsf{n}_{\mathsf{s}}\}\tag{4}$$

式中:R为齿轮副可靠度;n为齿轮齿面的计算安全系数;n。为齿面设计安全系数。齿根的安全系数定义为<sup>[4]</sup>

$$n = \frac{\sigma_{Hlim}}{\sigma_{H}}$$
(5)

式中: σ<sub>Him</sub> 为材料的接触疲劳极限; σ<sub>H</sub>为齿轮齿面应力。

本文基于蒙特卡洛思想<sup>16</sup>,根据齿轮误差因素的 分布特点,对其公差构成的随机变量进行大量重复抽 样,将样本值带入响应面模型,确定每组误差组合的 接触应力响应,得到每组误差组合下的安全系数,利 用式(4)计算其可靠度为0.9923。

## 3 结论

本文根据齿轮制造、加工及系统动态误差的产生 原理和作用方式,确定了影响齿轮接触应力随机性的 5种主要误差形式及其特征量分布规律,提出了基于 响应面方法的齿轮公差设计方法,并给出了齿轮系统 公差设计的改进方向。

分析结果表明:影响齿轮接触应力随机性的误差 主要有5种,即分度圆齿厚误差、齿形误差、中心距偏 差和H、V方向轴向平行度误差。在进行齿轮公差设 计时,应重点控制H、V方向的轴向平行度误差。

#### 参考文献:

[1] 林基恕. 航空燃气涡轮发动机机械系统设计[M]. 北京:航空工业出版社,2005:157-160.

LIN Jishu. Mechanical system design for aero gas turbine engines[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2005:157-160.(in Chinese)

[2] 史妍妍. 基于热分析的附件机匣若干可靠性问题研究 [D]. 沈阳:东 北大学,2009.

SHI Yanyan. Study on accessory gearbox reliability based on thermal analysis[D]. Shenyang:Northeastern University, 2009.(in Chinese)

[3] 王宇宁, 孙志礼, 杨丽, 等. 考虑装配误差的轴系结构静力学对比分 析[J]. 中国工程机械学报, 2014, 12(1):13-17. WANG Yuning, SUN Zhili, YANG Li, et al. Statics comparative analysis on shafting structures with consideration of assembly error [J]. Chinese Journal of Construction, 2014, 12(1):13-17.(in Chinese)

- [4] 佟操,孙志礼,马小英,等.考虑安装与制造误差的齿轮动态接触仿 真[J]. 东北大学学报,2014,35(7):996-1000.
  TONG Cao,SUN Zhili,MA Xiaoying,et al. Dynamic simulation of spur gears with assembly errors and machining errors [J]. Journal of Northeastern University(Natural Science),2014,35(7):996-1000.(in Chinese)
- [5] 孙之星. 考虑装配误差的齿轮接触应力仿真研究[D]. 太原:太原理 工大学,2010.

 $\label{eq:SUN Zhixing. Contact stress simulation study of gears with assembly $$ error[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2010. (in Chinese) $$ \label{eq:Contact}$ 

- [6] Bonori G, Pellicano F. Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 30 (6): 271-283.
- [7] 方昆凡. 公差与配合使用手册 [M]. 北京: 机械工业出版社,2012: 35-40.

FANG Kunfan. Manual of tolerances and fits [M]. Beijing:Machinery Industry Press, 2012:35-40.(in Chinese)

- [8] Chamoli S. ANN and RSM approach for modeling and optimization of designing parameters for a V down perforated baffle roughened rectangular channel [J]. Alexandria Engineering Journal, 2015, 54 (3): 429-446.
- [9] Myers R H, Montgomery D C, Vining G G, et al. Response surface methodology: a retrospective and literature survey[J]. Journal of Quality

Technology, 2004, 36(1):53-77.

- [10] Gangel M, Seiler M J, Collins A. Latin hypercube sampling and the identification of the foreclosure contagion threshold [J]. Journal of Behavioral Finance, 2013, 14(2):149-159.
- [11] Pianosi F, Sarrazin F, Wagener T. A matlab toolbox for global sensitivity analysis [J]. Environmental Modeling & Software, 2015, 70: 80-85.
- [12] 陈云霞,段朝阳. 飞控系统最坏情况分析方法研究[J]. 航空学报, 2005,26(5):647-651.

CHEN Yunxia, DUAN Chaoyang. Study on worst case analysis method for flight control system [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2005,26(5):647-651.(in Chinese)

[13] 陈云霞. 性能与可靠性一体化建模和分析方法研究[D]. 北京:北京 航空航天大学,2004.

CHEN Yunxia. Study on the method of integrated modeling and analysis for performance and reliability [D]. Beijing:Beihang University, 2004.(in Chinese)

[14] 孙自龙,闫凤英,刘丽.齿轮加工中剃齿的误差分析及处理[J].金属加工(冷加工),2014 (5):63-65.

SUN Zilong, YAN Fengying, LIU Li. Error analysis and treatment for gear shaving during gear machining [J]. Metal Working (Cold), 2014 (5):63-65.(in Chinese)

[15] Walter J C, Barkema G T. An introduction to Monte Carlo methods[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2015, 418: 78-87.

(编辑:栗枢)